Ludwig-Maximilians-Universität München SoSe 2009
Institut für Informatik
PD Dr. Martin Lange
Dipl.-Inf. Markus Latte 23. April 2009

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 1
Abgabe bis Donnerstag, 30. April 2009, 14h ct.
in der Vorlesung oder vor der Übung,
Besprechung am 30. April 2009

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass die aussagenlogische Formel $A \rightarrow \neg(A \wedge B)$ äquivalent ist zur Formel $(B \rightarrow \neg A) \wedge (A \rightarrow \neg B)$.

Aufgabe 2. Sie haben Ihre drei Freunde **A**deltraud, **B**enedict und **C**äcilia zu Ihrer Party eingeladen. Wie es manchmal aber so ist, hat jeder seine Vorbehalte:

- Wenn **C**äcilia nicht kommt, dann kommt auch **B**enedict nicht.
- Entweder **B**enedict oder **C**äcilia kommt, aber nicht beide.
- **C**äcilia und **A**deltraud kommen, wenn sie denn kommen, nur zusammen.

Jetzt wollen Sie natürlich wissen: Für welche Leute müssen Sie nun Salat, Kuchen und Getränke einplanen? Es seien **A**, **B** und **C** die Aussagen, dass **A**deltraud, **B**enedict bzw. **C**äcilia kommt.

(a) Begründen Sie durch Überlegen und sprachliches Argumentieren, wer nun zur Party kommt.

(b) Drücken Sie die obigen drei Aussagen symbolisch als eine Konjunktion φ von Formeln aus.

(c) Erstellen Sie eine Wahrheitstafel für φ und bestimmen sie damit, wer zur Party erscheint.

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass $\{\neg\cdot, \cdot \wedge \cdot\}$, $\{\neg\cdot, \cdot \vee \cdot\}$ und $\{\cdot \rightarrow \cdot\}$ jeweils funktional vollständig sind.

(b) Begründen Sie kurz, warum $\{\neg\cdot\}$ *nicht* funktional vollständig ist.

(c) Begründen Sie kurz, warum $\{\neg\cdot\}$ funktional vollständig für *ein*stellige Funktionen ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\{\cdot\mathsf{xor}\cdot\}$ *nicht* funktional vollständig ist, dabei ist xor die Antivalenz:

x	y	$x \mathbin{\mathsf{xor}} y$
ff	ff	ff
ff	tt	tt
tt	ff	tt
tt	tt	ff

Hinweise: 1. Zum Nachweis einer funktionale Unvollständigkeit reicht es, diese für zweistellige Funktionen zu zeigen. (wieso?)

2. Überlegen Sie sich eine geeignete Eigenschaft, die jede (zweistellige) Funktion, welche aus der Funktion xor aufgebaut werden kann, aufweist.

Aufgabe 4. Umgangssprachlich wird eine Wenn-Dann-Aussage oftmals als eine Genau-Dann-Wenn-Aussage angesehen. Diesen Umstand könnte man der Effizienz zurechnen: eine starke Prämisse enthält mehr Information als eine schwächere. Dabei ist ein schwache Prämisse ein Aussage, welche die starke impliziert.

(a) Finden Sie zwei umgangssprachliche Aussagen φ und ψ, so dass $\varphi \to \psi$ eine Tautologie ist, nicht aber $\varphi \leftrightarrow \psi$.

Eine umgangssprachliche Wenn-Dann-Aussage zwischen φ und ψ kann folgendermaßen formalisiert werden.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \models \varphi \to^* \psi \quad \text{gdw.} \quad & \mathcal{I} \models \varphi \to \psi \text{ und} \\ & \mathcal{I} \models (\rho \to \psi) \to (\rho \to \varphi) \text{ für alle Aussagen } \rho. \end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie, dass eine umgangssprachliche Wenn-Dann-Aussage genau eine Genau-Dann-Wenn-Aussage über der zweielementigen Boolschen Algebra $\{\mathsf{ff}, \mathsf{tt}\}$ ist, also dass $\varphi \to^* \psi \iff \varphi \leftrightarrow \psi$ für alle Formeln φ und ψ gilt.

Aufgabe 5. Diese Aufgabe ist auf das zweite Übungsblatt verschoben! Berechnen Sie zu den aussagenlogische Formeln

(a) $\neg(X \to ((Y \lor X) \to \neg Z) \leftrightarrow Y)$ und

(b) $((X \to Y) \to X) \to X$

jeweils eine äquivalente KNF, eine äquivalente DNF sowie eine erfüllungsäquivalente KNF.