Ludwig-Maximilians-Universität München SoSe 2009
Institut für Informatik
PD Dr. Martin Lange
Dipl.-Inf. Markus Latte 30. April 2009

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 2
Abgabe bis Freitag, 8. Mai 2009, 12h ct.
in der Vorlesung oder vor der Übung,
Besprechung am 8. Mai 2009

Aufgabe 5. Berechnen Sie zu den aussagenlogische Formeln

(a) $\neg(X \rightarrow ((Y \vee X) \rightarrow \neg Z) \leftrightarrow Y)$ und

(b) $((X \rightarrow Y) \rightarrow X) \rightarrow X$

jeweils eine äquivalente KNF, eine äquivalente DNF sowie eine erfüllungsäquivalente KNF.

Aufgabe 6. Unter einer Interpretation $\mathcal{I}$ definieren wir den *numerischen Wert* einer Aufzählung von Aussagenvariablen $X_0, \dots, X_{n-1}$ als

$$[\![X_0, \dots, X_{n-1}]\!]_{\mathcal{I}} := \sum_{k=0, \mathcal{I}(X_k)=\mathtt{tt}}^{n-1} 2^{n-1-k}$$

(a) Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $[\![X_0, X_1, X_2, X_3, X_4]\!]_{\mathcal{I}} = 12$ an.

Sei nun $\vec{X} := X_0, \dots, X_{n-1}$ und $\vec{Y} := Y_0, \dots, Y_{n-1}$.

(b) Finden Sie eine Formel φ nur in den Aussagenvariablen $\vec{X}$ und $\vec{Y}$, so dass für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$ genau dann, wenn $[\![\vec{X}]\!]_{\mathcal{I}} < [\![\vec{Y}]\!]_{\mathcal{I}}$. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Formel. Bestimmen Sie die asymptotische Größe Ihrer Formel.

(c) Finden Sie eine Formel ψ, die den gleichen Sachverhalt wie φ darstellt, jedoch zusätzliche Variablen verwenden darf und deren Größe höchstens linear in n ist. Wie muss die formale Spezifikation aus (b) hinsichtlich der zusätzlichen Variablen abgeändert werden?

Aufgabe 7. Diese Aufgabe ist auf das dritte Übungsblatt verschoben! Entscheiden Sie mittels des DPLL-Algorithmuses, ob die folgenden Klauselmengen erfüllbar sind. Geben Sie wesentliche Zwischenschritte an.

(a) $\{\{A, B, C, D, E, F\}, \{\neg C\}, \{C, \neg A\}\}$

(b) $\{\{A, \neg B, C, \neg D, \neg E, \neg F\}, \{\neg C\}, \{C, \neg A\}\}$

(c) $\{\{\neg A, B\}, \{C, \neg B\}, \{\neg C, E, F\}, \{\neg E, F\}, \{E, \neg F\}, \{\neg E, \neg F\},$
$\{A, B, C, D\}, \{\neg D, B\}, \{A, \neg D, C\}\}$

Hinweis: Achten Sie nicht nur auf eine geeignete Wahl der Variablen, sondern auch auf eine geeignete Setzung, also ob Sie mit $\mathcal{C}[\top/A]$ oder $\mathcal{C}[\bot/A]$ rekursive weiterarbeiten.

Aufgabe 8. Sei $\mathcal{C}$ eine Horn-Formel, geschrieben als Klauselmenge.

(a) Beweisen Sie: Wenn $\mathcal{C}$ eine Klausel $\{A\}$ bzw. $\{\neg A\}$ enthält, wobei A eine Variable sei, so sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}[\top/A]$ bzw. $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}[\bot/A]$ erfüllungsäquivalent.

(b) Zeigen Sie: Falls $\mathcal{C}$ keine Klausel der Form $\{A\}$ oder $\{\neg A\}$ enthält, so weist $\mathcal{C}$ die leere Klausel auf oder $\mathcal{C}$ ist durch ein Belegung erfüllbar, die jede Variable auf ff schickt.

(c) Geben Sie ein Algorithmus an, der in quadratischer Zeit entscheidet, ob eine Horn-Formel erfüllbar ist. Begründen Sie die Korrektkeit Ihres Verfahrens.

Hinweis: Die Lösung der erste Teilaufgabe könnte Sie zu einer Schleife veranlassen.

(d) Erweitern Sie Ihren Algorithmus so, dass er ggf. eine erfüllende Belegung bestimmt.

Aufgabe 9. Seien $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ $2n$ verschiedene Aussagenvariablen.

(a) Finde Sie eine KNF zur Formel $\varphi := (\bigwedge_{k=1}^{n} A_k) \vee (\bigwedge_{k=1}^{n} B_k)$. Wie groß ist Ihre Formel?

Wir möchten nun zeigen, dass *jede* KNF die zu φ äquivalent ist, mindestens die Größe n^2 hat. Dazu sei $\mathcal{C}$ die Klauselmenge einer KNF zu φ.

(b) Zeigen Sie, dass in einer Klausel K von $\mathcal{C}$, die eine Variable X nur negative enthält, das negative Vorkommen gestrichen werden kann unter Bewahrung der Äquivalenz.
Hinweis: φ ist monoton.

Im Folgenden sei $\mathcal{C}$ die Klauselmenge einer *kleinsten* KNF zu φ.

(c) Zeigen Sie, dass jede Variable in jeder Klausel von $\mathcal{C}$ nur positiv vorkommt.
Hinweis: Obige Teilaufgabe und Minimalität.

(d) Beweisen Sie, dass $\mathcal{C}$ keine Einerklauseln enthält, also dass keine Klausel in $\mathcal{C}$ nur aus einer Variablen bestehen kann.

(e) Zeigen Sie: Für alle i und j zwischen 1 und n gibt es eine Klausel in $\mathcal{C}$, die A_i und B_j enthält.

(f) Mit obiger Teilaufgabe, gibt es n^2 viele Paare und jedem Paar kann eine Klausel aus $\mathcal{C}$ zugeordnet werden. Warum kann man daraus alleine noch nicht zeigen, dass es n^2 Klauseln in $\mathcal{C}$ gibt?

(g) Zeigen Sie: Für je zwei *verschiedene* Paare (i, j) und (i', j') (mit $1 \leq i, j, i', j' \leq n$) gibt es keine Klausel in $\mathcal{C}$, die sowohl A_i, B_j, $A_{i'}$ als auch $B_{j'}$ enthält.

(h) Führen Sie den Beweis zu Ende.

Hinweise: Viele der Teilaufgaben können per Widerspruch bewiesen werden und ggf. durch die Konstruktion einer Interpretation, in der sich φ und $\mathcal{C}$ unterscheiden würden.

Da erzielte Ergebnis kann verschärft werden.

(i) Geben Sie eine Folge von Formel, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, an, so dass

- die Größe von φ_n höchstens quadratisch in n ist, und
- *jede* zu φ_n äquivalente KNF mindestens exponentiell in n ist.

Begründen Sie Ihre Antwort *kurz*.