Ludwig-Maximilians-Universität München SoSe 2009
Institut für Informatik
PD Dr. Martin Lange
Dipl.-Inf. Markus Latte 7. Mai 2009

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 3
Abgabe bis Freitag, 15. Mai 2009, 12h ct. vor der Übung
Besprechung am Freitag, 15. Mai 2009

Falls mindestens 15 Personen ihre Übungblätter sinnvoll bearbeitet abgeben, werden wir Musterlösungen zu den Blättern 1 bis 3 im Netz veröffentlichen. Dieses Angebot soll Sie lediglich zur Abgabe ermutigen. In jedem Fall werden die Übungsblätter in den Übungsstunden besprochen.
Dieses Prinzip wird solange beibehalten, bis es von einem anderen Prinzip abgelöst wird.

Aufgabe 7. Entscheiden Sie mittels des DPLL-Algorithmuses, ob die folgenden Klauselmengen erfüllbar sind. Geben Sie wesentliche Zwischenschritte an.

(a) $\{\{A, B, C, D, E, F\}, \{\neg C\}, \{C, \neg A\}\}$

(b) $\{\{A, \neg B, C, \neg D, \neg E, \neg F\}, \{\neg C\}, \{C, \neg A\}\}$

(c) $\{\{\neg A, B\}, \{C, \neg B\}, \{\neg C, E, F\}, \{\neg E, F\}, \{E, \neg F\}, \{\neg E, \neg F\},$
$\{A, B, C, D\}, \{\neg D, B\}, \{A, \neg D, C\}\}$

Hinweis: Achten Sie nicht nur auf eine geeignete Wahl der Variablen, sondern auch auf eine geeignete Setzung, also ob Sie mit $\mathcal{C}[\top/A]$ oder $\mathcal{C}[\bot/A]$ rekursive weiterarbeiten.

Aufgabe 10. In dieser Aufgabe soll das Lemma von König mittels des Kompaktheitssatzes gezeigt werden:

> Jeder endlich verzweigende Baum mit Wurzel w, in dem beliebig lange in w beginnende Pfade existieren, hat einen unendliche Pfad, der in w beginnt.

Dabei ist ein Pfad eine Folge von Knoten im Baum, so dass jede zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Knoten in Eltern-Kind-Beziehung stehen.

Sei $\mathcal{T}$ nun ein Baum entsprechend der Voraussetzungen des Lemmas und K seine Knotenmenge. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei E_n die Menge der Knoten auf Ebene n, also

$$E_n := \{k \in K \mid \text{es gibt einen Pfad der Länge } n \text{ von } w \text{ nach } k\}.$$

(a) Begründen Sie kurz, warum E_n endlich ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für jeden Knoten k gebe es eine Variable X_k.

(b) Finden Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel ε_n, die besagt, dass unter den Variablen $\{X_k \mid k \in E_n\}$ genau eine wahr ist.

Setze $\Phi := \{\varepsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{X_k \to X_v \mid k \text{ ist ein Kind von } v\}$.

(c) Zeigen Sie, dass jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.

(d) Zeigen Sie mittels des Kompaktheitssatzes, dass $\mathcal{T}$ einen unendlichen Pfad besitzt.

(e) Warum ist eine entsprechende Formulierung des Lemma von König für unendlich verzweigende Bäume falsch? Finden Sie ein Gegenbeispiel! Wo geht in Ihrem Beweis des Lemmas von König der endliche Verzweigungsgrad ein?

Aufgabe 11. Finden Sie Resolutionsbeweise für die Unerfüllbarkeit der folgenden Klauselmengen bzw. Formeln.

(a) $\{\{A\}, \{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{\neg C, D\}, \{\neg D\}\}$.

(b) $\{\{A\}, \{\neg A, B, C\}, \{\neg B, C\}, \{\neg C\}\}$.

(c) $\{\{\neg A, B\}, \{C, \neg B\}, \{\neg C, E, F\}, \{\neg E, F\}, \{E, \neg F\}, \{\neg E, \neg F\},$
$\{A, B, C, D\}, \{\neg D, B\}, \{A, \neg D, C\}\}$

(d) $$\begin{array}{l}(P_{1,1} \vee P_{1,2})\wedge\ (P_{2,1} \vee P_{2,2})\wedge\ (P_{3,1} \vee P_{3,2})\wedge\\ \neg(P_{1,1} \wedge P_{2,1})\wedge\neg(P_{1,1} \wedge P_{3,1})\wedge\neg(P_{2,1} \wedge P_{3,1})\wedge\\ \neg(P_{1,2} \wedge P_{2,2})\wedge\neg(P_{1,2} \wedge P_{3,2})\wedge\neg(P_{2,2} \wedge P_{3,2})\end{array}$$

Hinweise: 1. $P_{i,j}$ kann verstanden werden als die Aussage, dass Taube i im Taubenloch j sitzt. Die gesamte Formel behauptet, dass drei Tauben auf zwei Taubenlöcher verteilt werden können, ohne dass zwei Tauben sich eines teilen müssen.
2. Der Resolutionsbaum ist groß.

Zeigen Sie mit Hilfe der Resolution, dass

(e) $\neg(B \to A) \vee \neg\neg D \vee (A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (A \wedge C)$ allgemeingültig ist und

(f) $\{\{\neg A, \neg B\}, \{\neg A, B\}, \{A, \neg B\}\}$ erfüllbar ist.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass es einen Resolutionsbeweis der Höhe n gibt und führen Sie dies zu einem Widerspruch. Betrachten Sie dazu den jeweils letzten Resolutionsschritt in dem Baum.

Aufgabe 12. Das Resolutionskalkül sei um die sogenannte Weakening[2]-Regel

$$\frac{C}{D}$$

erweitert, wobei C und D Klauseln mit $C \subseteq D$ bezeichnen.

(a) Die Klausel C sei wie folgt aus den Klauseln C_1 und C_2 resolvierbar, wobei $\neg X \in C_1$ und $X \in C_2$ sei.

$$\dfrac{C_1 \qquad \dfrac{C_2}{C_2 \cup \{Y\}}\ \text{(Weakening)}}{C}\ \text{(Resolution)}$$

Zeigen Sie, dass es auch eine Resolution von C aus C_1 und C_2 gibt, so dass Weakening höchstens als unterste Regelanwendung vorkommt. Was ist zu beachten, wenn X und Y die gleiche Variable bezeichnen?

(b) Zeigen Sie, dass in jedem Resolutionsbeweis mit Weakening, die Vorkommen von Weakening zur Wurzel verschoben werden können.

(c) Begründen Sie kurz, warum ein Weakening an einer Wurzel mit $\emptyset$ entfernt werden kann.

Wir möchten nun mit Hilfe der Weakening-Regel die Vollständigkeit der Resolution zeigen. Dazu sei $\mathcal{K}$ eine Menge von Klauseln über einer endlichen Variablenmenge X. Weiter wählen wir folgende Klauselmengen.

$$\begin{aligned}\mathcal{K}' &:= \{D \mid D \supseteq C \in \mathcal{K}, D \text{ tautologiefrei und } \mathsf{Var}(D) = X\} \text{ und}\\ \mathcal{X} &:= \{D \mid D \text{ tautologiefrei und } \mathsf{Var}(D) = X\}.\end{aligned}$$

Eine Klausel heißt *tautologiefrei*, wenn sie keine Variable sowohl positiv als auch negativ enthält. Zeigen Sie folgende Behauptungen **ohne** Verwendung der Vollständigkeit der Resolution.

(d) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}'$, falls $\mathcal{K}$ unerfüllbar.

(e) Es gibt einen Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{X}$.
Hinweis: Induktion über die Größe von X.

Zeigen sie weiter ohne Rückgriff auf die Vollständigkeit der Resolution, dass, falls $\mathcal{K}$ unerfüllbar ist, Resolutionsbeweise existieren ...

(f) ... mit Weakening für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{K}'$.

(g) ... mit Weakening für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{K}$.

(h) ... ohne Weakening für die Unerfüllbarkeit $\mathcal{K}$.

[2] engl. für Abschwächung