Ludwig-Maximilians-Universität München SoSe 2009
Institut für Informatik
PD Dr. Martin Lange
Dipl.-Inf. Markus Latte 14. Mai 2009

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 4
Abgabe bis Freitag, 22. Mai 2009, 12h ct. vor der Übung
Besprechung am Freitag, 22. Mai 2009

Aufgabe 13. Entscheiden Sie für folgende Formeln, ob sie allgemeingültig sind. Geben Sie entweder einen Beweis im Sequenzenkalkül und eine falsifizierende Interpretation an.

(a) $(A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$

(b) $((P \to Q) \to P) \to P$

(c) $P \wedge \neg P \to Q$

(d) $(A \to A) \to A \to A$.

(e) $(A \to A \wedge B \wedge C) \vee (B \to A \wedge B \wedge C) \vee (C \to A \wedge B \wedge C)$

(f) $A \wedge D \to (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge (C \wedge D))$

(g) $\neg(B \to A) \vee \neg\neg D \vee (A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (A \wedge C)$

Zusatzaufgabe: Formalisieren Sie Ihre Beweise in PVS. (Keine Abgabe.)

Aufgabe 14. Eine Regel heißt *korrekt*, wenn aus der Gültigkeit aller ihrer Prämissen, die Gültigkeit ihrer Konklusion folgt. Eine Regel heißt *invertierbar*, wenn aus der Gültigkeit ihrer Konklusion, die Gültigkeit aller ihrer Prämissen folgt. **Hinweis:** Korrektheit und Invertierbarkeit sind die beiden Richtungen des Ableitungslemmas aus der Vorlesung.

(a) Zeigen Sie, dass die Regel ($\to$-L) korrekt und invertierbar ist.

(b) Die sogenannte Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Longrightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (weakening)}$$

ist zwar korrekt aber nicht invertierbar. Begründen Sie diesen Sachverhalt.

(c) Geben Sie für beide Seiten einer Sequenz jeweils eine korrekte und invertierbare Regel für die Biimplikation $\leftrightarrow$ an. Als Vorlage können Ihnen folgende Sequenzen dienen.

$$\Gamma \Longrightarrow \Delta, \alpha \leftrightarrow \beta \qquad \Gamma, \alpha \leftrightarrow \beta \Longrightarrow \Delta$$

Die Prämissen sollen nur in den Symbolen $\Longrightarrow, \Gamma$, Δ, α und β ausgedrückt werden. Weisen Sie *eine* Ihrer Regeln als korrekt und invertierbar nach.

Aufgabe 15. Finden Sie eine Familie von Formeln, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

(a) die Wahrheitstafel von φ_n *mindestens* 2^n Zeilen hat (für alle $n \in \mathbb{N}$),

(b) es aber für alle $n \in \mathbb{N}$ einen Beweis im Sequenzenkalkül von φ_n gilt, so dass *höchstens* linear viele Regeln angewendet werden.

Wie interpretieren Sie diesen Sachverhalt?

Aufgabe 16. In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass ein Resolutionsbeweis effizient in einen Sequenzenbeweis umgewandelt werden kann, siehe Teilaufgabe (b) für $C = \emptyset$. Im Folgenden bezeichnen C und D Klauseln (als Menge notiert) und $\mathcal{K}$ eine Klauselmenge. Für eine Klausel C bezeichne C^+ die Menge der Variablen von C, die in C positiv auftreten, und C^- solche, die negativ in C vorkommen; also beispielsweise $\{A, \neg B, C\}^+ = \{A, C\}$ und $\{A, \neg B, C\}^- = \{B\}$. Die Größe von Resolutions- und Sequenzenbeweisen bezeichne die Anzahl der Regel- und Axiomanwendungen. Beweisen Sie folgende Aussagen ohne Rückgriff auf Korrektheit oder Vollständigkeit eines der beiden Kalküle.

(a) Für alle Klauseln $C \in \mathcal{K}$ hat $\{\bigvee_{\ell\in D} \ell \mid D \in \mathcal{K}\}, C^- \implies C^+$ einen Sequenzenbeweis der Größe $\leq 3(|C| + 1)$.

(b) Falls es einen Resolutionsbeweis aus der Klauselmenge $\mathcal{K}$ einer Klausel C gibt, der s Resolutionsschritte braucht, so gibt es einen Sequenzenbeweis der Größe $3s \cdot \max\{|D|+1 \mid D \in \mathcal{K}\}$ von $\{\bigvee_{\ell\in D} \ell \mid D \in \mathcal{K}\}, C^- \implies C^+$. Der konstruierte Sequenzenbeweis darf die Schnittregeln (`Cut`) und (`Cut*`) aus der Vorlesung enthalten.

Beispiel zu Aufgabe 16.
Die Klauselmenge $\mathcal{K} := \{\{\neg A, B, \neg E\}, \{\neg A, \neg B\}, \{A, B\}, \{A, \neg B\}, \{E\}\}$ hat folgenden Resolutionsbeweis (für ihre Unerfüllbarkeit).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\boxed{\neg A, B, \neg E}_{(I)} \qquad \boxed{\neg A, \neg B}_{(II)}}{\boxed{\neg A, \neg E}_{(III)}} \qquad \dfrac{A, B \qquad A, \neg B}{A}}{\neg E} \qquad E}{\emptyset}$$

Mit der Setzung $\Gamma := \{\bigvee_{\ell\in D} \ell \mid D \in \mathcal{K}\} = \{\neg A \vee (B \vee \neg E), \neg A \vee \neg B, A \vee B, A \vee \neg B, \neg E\}$ kann obiger Resolutionsbeweis in einen Sequenzenbeweis umgeformt werden, der auszugsweise wie folgt aussieht.

$$\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, E \Longrightarrow A, B}}{\Gamma, \neg A, A, E \Longrightarrow B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B, A, E \Longrightarrow B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, E \Longrightarrow B, E}}{\Gamma, \neg E, A, E \Longrightarrow B}}{\Gamma, B \vee \neg E, A, E \Longrightarrow B}}{\Gamma, \neg A \vee (B \vee \neg E), A, E \Longrightarrow B}}_{(I)} \qquad \boxed{\begin{matrix} \vdots \\ \Gamma, A, B \Longrightarrow \emptyset \end{matrix}}_{(II)}}{\boxed{\Gamma, A, E \Longrightarrow \emptyset}_{(III)}}$$

$$\vdots$$

In der Sequenz $\Gamma, \neg A \vee (B \vee \neg E), \neg A, E \Longrightarrow B$ wurde $\neg A \vee (B \vee \neg E)$ nur deutlichkeitshalber nochmal explizit genannt. Die Formel liegt ja bereits in Γ.