Ludwig-Maximilians-Universität München SoSe 2009
Institut für Informatik
PD Dr. Martin Lange
Dipl.-Inf. Markus Latte 28. Mai 2009

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 5
Abgabe bis Freitag, 5. Juni 2009, 12h ct. vor der Übung
Besprechung am 5. Juni 2009

Aufgabe 17. Entscheiden Sie, ob die folgenden Formeln jeweils Tautologien sind. Im positiven Fall geben Sie einen Beweis im Sequenzenkalkül an. Andernfalls finden Sie ein Gegenbeispiel bestehend aus einer Signatur und einer Struktur!

(a) $(\exists x.\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x.\varphi) \vee (\exists x.\psi)$.

(b) $(\exists x.\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\exists x.\varphi) \wedge (\exists x.\psi)$.

(c) $(\exists x.\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\exists x.\varphi) \wedge (\exists x.\psi)$, falls $x \notin \mathit{frei}(\psi)$.

(d) $(\forall x \exists y.\psi) \rightarrow \exists y \forall x.\psi$.

(e) $(\exists y \forall x.\psi) \rightarrow \forall x \exists y.\psi$.

(f) $(\neg \exists x.\varphi) \leftrightarrow \forall x.\neg\varphi$.

Aufgabe 18. Bestimmen Sie zu folgenden Formeln zuerst eine ihrer Pränex- und anschließend eine ihrer Skolem-Normalformen.

(a) $\neg\forall y.\neg((\forall x.P(x,y)) \wedge ((\neg\exists y.P(y,y)) \rightarrow P(y,y)))$

(b) $\exists x.\forall y.\forall z.\neg(P(x,y) \wedge P(y,z))$

(c) $\forall x.\neg P(x,x) \rightarrow \neg\exists y.\forall z.P(y,z) \rightarrow \neg P(x,z)$

(d) $\forall x.(\neg\exists y.P(x,y)) \leftrightarrow (\neg\exists z.P(z,x))$

Aufgabe 19. Ein Formel heißt *termreduziert*, wenn sie nur atomare Formeln der Form $x \doteq y$, $R(x_1,\ldots,x_n)$ und $f(x_1,\ldots,x_n) \doteq y$ enthält, wobei $n \in \mathbb{N}$ und y, x_1, ... Variablen bezeichnen. Zeigen Sie, dass es zu jeder Formel φ eine äquivalente termreduzierte Formel gibt, dessen Größe linear in der Größe von φ beschränkt ist.

Aufgabe 20. Bestimmen Sie, welche der folgenden Relationen in der jeweiligen Strukturklasse definierbar sind. Im positiven Fall geben Sie eine definierende Formel an und im negativen Fall eine kurze informelle Begründung dafür.

(a) Die übliche Kleiner-Relation, $<$, in den Strukturklassen $\{(\mathbb{N},+)\}$, $\{(\mathbb{Z},+)\}$ und $\{(\mathbb{Q},+,\cdot)\}$.

(b) Die Relationen $\mathsf{isPrim}(x)$ und $\mathsf{ggT}(x,y,z)$ jeweils in $\{(\mathbb{N},+,\cdot)\}$ und $\{(\mathbb{N},\cdot)\}$. Die Relationen stehen für einen Primzahltest und den größten gemeinsamen Teiler der ersten beiden Argumenten.

Die Funktionen $+$ und $\cdot$ bezeichnen die übliche Addition und Multiplikation der jeweiligen Klasse.