Ludwig-Maximilians-Universität München SoSe 2009
Institut für Informatik
PD Dr. Martin Lange
Dipl.-Inf. Markus Latte 5. Juni 2009

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 6
Abgabe bis Freitag, **19. Juni 2009**, 12h ct. vor der Übung
Besprechung am **19. Juni 2009**

Aufgabe 21. Gegeben sei eine leere Signatur τ. Wir sagen, dass eine Formel φ bzw. eine Formelmenge Γ eine *Eigenschaft des Universum* ausdrückt, wenn für jede Menge U gilt: Die Eigenschaft trifft auf U zu gdw. es ein Modell von φ bzw. Γ gibt, dessen Universum U ist.

(a) Geben Sie eine Formel $\varphi_{\leq 4}$ an, die ausdrückt, dass das Universum höchstens vier Elemente hat. Es soll also für alle Mengen U gelten: $|U| \leq 4$ gdw. $\varphi_{\leq 4}$ erfüllbar ist durch eine Modell mit Universum U.

(b) Geben Sie eine Formel $\varphi_{\geq 3}$ an, die besagt, dass das Universum mindesten drei Elemente hat.

(c) Geben Sie eine *Formelmenge* Γ_∞ an, die ausdrückt, dass das Universum unendlich ist.

(d) Wir erweitern – nur für diese Teilaufgabe – die Signatur mit einem einstelligen Funktionszeichen f. Geben Sie eine *Formel* φ_∞^f an, die audrückt, dass das Universum unendlich ist.
Hinweis: Ist X eine endliche Menge und $g : X \to X$ eine injektive Funktion, so ist g auch surjektiv. (Wieso eigentlich?)

(e) Zeigen Sie, es gibt keine Formelmenge $\Gamma_{<\infty}$, die ausdrückt, dass das Universum endlich ist.
Hinweis: Sie dürfen hier verwenden, dass es auch einen Kompaktheitssatz für die erststufige Logik gibt, analog zu dem der Aussagenlogik: Für jede (erststufige) Formelmenge Γ gilt folgendes. Γ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge erfüllbar ist.

Wir erweitern die Signatur um eine zweistellige Relation R, die wir sowohl auf syntaktischer als auch semantischer Seite infix notieren. Weiter sei

$$Ord := \{\ \forall x.\forall y.\forall z.\ xRy \wedge yRz \to xRz,\ \ \forall x.\forall y.\neg(xRy \wedge yRx)\ \}$$

und $\mathcal{O}$ eine Modell von *Ord* mit einem Universum O.

(f) Zeigen Sie, dass es in $\mathcal{O}$ keine Zyklen bezüglich $R^{\mathcal{O}}$ gibt, also, dass

$$o_0\, R^{\mathcal{O}} \ldots R^{\mathcal{O}}\, o_n\, R^{\mathcal{O}}\, o_0$$

für kein $1 \leq n \in \mathbb{N}$ und keine $o_0, \ldots, o_n \in O$ möglich ist.

(g) Geben Sie eine Formeln φ_∞^{Ord} an, so dass jedes Modell von $Ord \cup \{\varphi_\infty^{Ord}\}$ ein unendliches Universum hat.

Aufgabe 22. Sei τ eine Signatur, die nur ein zweistelliges Relationszeichen P, eine zweistellige Funktion f und die Konstanten c und d enthält. Sei

$$\begin{aligned}\Gamma := \{\ &\forall x.P(x,x),\ \ \forall x.\forall y.P(x,y) \vee P(y,x),\ \ \neg(P(c,d) \wedge P(d,c)),\\ &\forall x.\forall y.\forall u.\forall w.P(x,u) \wedge P(y,w) \to P(f(x,y), f(u,w))\ \}\end{aligned}$$

eine Formelmenge über τ.

(a) Geben Sie ein Modell von Γ über dem Universum $\mathbb{N}$ an.

(b) Geben Sie ein Herbrand-Modell von Γ an.

Die restliche Aufgabe ist auf das siebte Übungsblatt verschoben!
Sei $\Delta := \{\ \forall x.\forall y.P(x,y),\ \ \exists x.\exists y.\neg P(x, f(x,y))\ \}$ eine Formelmenge über τ.

(c) Zeigen Sie, dass Δ unerfüllbar ist.

(d) Ist $AL(\Delta)$ als aussagenlogische Formelmenge erfüllbar oder nicht?

Aufgabe 23. Sei τ eine Signatur mit genau einer zweistelligen, infix notierten Funktion $\_ \circ \_$, und zwei Konstanten c und d. Die Sequenz S

$$\forall x.\forall y.\forall z.x \circ (y \circ z) \doteq (x \circ y) \circ z \Longrightarrow c \circ d \doteq d \circ c$$

ist ungültig. Ein Beweisversuch führt zu einem maximalen Pfad Π von Sequenzen, der nicht mit einem Axiom endet.

(a) Welche Form hat jede Sequenz eines solchen Pfades?

Sei $\mathcal{A}^{\Pi}$ nun das Termmodell zu Π, wie in der Vorlesung angegeben.

(b) Welche Terme identifiziert die Kongruenzrelation $\sim$ von $\mathcal{A}^{\Pi}$ miteinander? Jeder Term kann als Baum aufgefasst werden. Wie stehen die Blätterfronten identifizierter Terme zueinander?

(c) Welche Datenstruktur modelliert das Termmodell? Zeigen Sie mit Hilfe des Termmodells, dass die Datenstruktur assoziativ aber nicht kommutativ ist!

Aufgabe 24. Ein Formelmenge Ψ heiße *Skolem-Form einer Formelmenge* Φ genau dann, wenn Ψ für jede Formel φ von Φ eine Skolem-Form von φ enthält.

(a) Finden Sie eine erfüllbare Formelmenge Φ und eine unerfüllbare Skolem-Form von Φ.
Hinweis: Obige Definition lässt offen, ob die Formeln z.B. simultan (jeweils für sich) oder (zusammen) sequentiell skolemisiert wurden.

(b) Sei nun Φ eine Formelmenge. Zeigen Sie, dass eine Skolem-Form Ψ zu Φ existiert, so dass Φ erfüllbar ist genau dann, wenn Ψ erfüllbar ist.

Aufgabe 25. Sei φ eine Formel zu einer Signatur τ und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \theta)$ eine Interpretation über τ mit Universum A. Weiter sei $\widehat{a} \notin A$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Interpretation $\mathcal{I}'$ über τ gibt mit dem Universum $A' := A \dot\cup \{\widehat{a}\}$ und der Eigenschaft:

$$\mathcal{I} \models \varphi \qquad \text{gdw.} \qquad \mathcal{I}' \models \varphi \tag{$\star$}$$

für alle Formeln φ ohne der eingebauten Gleichheit $\doteq$.
Hinweise:

(α) Das neue Element $\widehat{a}$ soll in $\mathcal{I}'$ als eine Art "Zwilling" zu einem fest gewählten Element in A behandelt werden, d.h. in $\mathcal{I}'$ soll sich das Zwillingspaar ununterscheidbar verhalten. Definieren Sie sich eine geeignete Funktion $\pi : A' \to A$ und verfeinern Sie damit die Behauptung ($\star$).

(β) Sie werden wohl eine Aussage ähnliche zu ($\star$) für Terme benötigen.

(b) Angenommen, $\varphi(x,y)$ sei eine Formel, welche die eingebaute Gleichheit $\doteq$ nicht verwendet, aber die Gleichheit zwischen x und y definiert. Führen Sie diese Annahme zu einem Widerspruch.
Hinweis: Was besagt die Formel $\forall x.\forall y.\varphi(x,y)$?