Ludwig-Maximilians-Universität München SoSe 2009
Institut für Informatik
PD Dr. Martin Lange
Dipl.-Inf. Markus Latte 18. Juni 2009

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 7
Abgabe bis Freitag, 26. Juni 2009, 12h ct. vor der Übung
Besprechung am 26. Juni 2009

Aufgabe 22 – Fortsetzung. Sei τ eine Signatur, die nur eine zweistelliges Relation P und eine zweistellige Funktion f enthält. Sei Δ die Formelmenge $\{\ \forall x.\forall y.P(x,y),\quad \exists x.\exists y.\neg P(x, f(x,y))\ \}$ über τ.

(c) Bestimmen Sie eine Skolemform Δ^{sko} von Δ.

(d) Zeigen Sie, dass Δ^{sko} unerfüllbar ist.

(e) Ist jeder Abschluss von $AL(\Delta^{sko})$ (als aussagenlogische Formelmenge) erfüllbar oder nicht?

Man könnte versuchen, den Satz von Herbrand auf Allgemeingültigkeit wie folgt zu erweitern: Für jede Formelmenge Φ von $\mathsf{FO}^{\forall}$-Sätzen ist Φ allgemeingültig gdw. jeder Abschluss von $AL(\Phi)$ erfüllbar ist.

(f) Zeigen Sie, dass diese Erweiterung falsch ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\Phi := \{\ \forall x.P(x,x)\ \}$.

Aufgabe 26. Sei τ eine endliche Signatur und $\mathcal{A}$ eine endliche Struktur über τ.

(a) Konstruieren Sie eine τ-Satz $\varphi_{\mathcal{A}}$, der $\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie beschreibt, d.h. für alle τ-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt:
$$\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \simeq \mathcal{A}.$$
Hinweis: Aufgabe 21(a) und (b) für die Größenbeschreibung des Universums von $\mathcal{A}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ aus $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ folgt.

Aufgabe 27. Sei φ eine FO-Formel in Skolem-Normalform.

(a) Begründen Sie kurz, warum $AL(\{\varphi\})$ aufzählbar ist, d.h. warum es einen Algorithmus gibt, welcher der Reihe nach die Elemente von $AL(\{\varphi\})$ ausgibt, dabei muss der Algorithmus nicht terminieren.

(b) Zeigen Sie: φ ist unerfüllbar gdw. alle Abschlüsse von $AL(\{\varphi\})$ unerfüllbar sind.

(c) Sei Θ ein Abschluss von $\Psi := AL(\{\varphi\})$ und sei $\Psi' \subseteq \Psi$. Zeigen Sie, dass es eine Menge $\Theta' \subseteq \Theta$ gibt, die Abschluss von Ψ' ist.

(d) Begründen Sie, warum es nur endliche viele Abschlüsse einer endlichen Formelmenge Ψ gibt, und warum diese aufzählbar sind.

(e) Geben Sie einen Algorithmus G an, der für eine FO-Formel φ folgendes leistet. Wenn G *unerfüllbar* zurückgibt, ist φ unerfüllbar. Der Algorithmus muss nicht terminieren.

Aufgabe 28. Sei τ eine Signatur, die nur eine zweistelliges Relationssymbol R enthält, und weiter sei $\varphi := \forall x.\neg R(x,x)$.

(a) Begründen Sie kurz, warum es unendlich viele nicht isomorphe Modelle von φ gibt!

(b) Wie viele nicht isomorphe Modelle hat φ, deren Universum die Größe 3 hat? Geben Sie die entsprechenden Äquivalenzklassen (bzgl. der Isomorphie) an!