Ludwig-Maximilians-Universität München SoSe 2009
Institut für Informatik
PD Dr. Martin Lange
Dipl.-Inf. Markus Latte 2. Juli 2009

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 9
Abgabe bis Freitag, 10. Juli 2009, 12h ct. vor der Übung
Besprechung am 10. Juli 2009

Aufgabe 33. (a) Sei $\tau = \emptyset$ und sei $\mathcal{N}$ die τ-Struktur mit Universum $\mathbb{N}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{A}_n$ die τ-Struktur $(\{0, \ldots, n-1\})$. In der Aufgabe 29(a) haben Sie gezeigt, dass der Duplikator das Spiel $\mathcal{G}_n^{\mathcal{N},\mathcal{A}_n}$ gewinnt. Zeigen Sie, dass es keine Formel φ_∞ über der leeren Signatur gibt, die ausdrückt, dass das Universum unendlich ist. (Vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabe 21(c).)
Hinweis: Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé.

(b) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Strukturen über einer gemeinsamen Signatur, so dass

- $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$, aber
- der Duplikator alle Spiele $\mathcal{G}_n^{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ gewinnt ($n \in \mathbb{N}$).

Zeigen Sie, dass sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{B}$ unendlich sind.

Aufgabe 34. Bezeichne $\varphi_m^{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ die Isomorphietypen wie im Beweis des Satzes von Ehrenfeucht-Fraïssé definiert (Folie 197). Zeigen Sie, dass die Menge

$$\left\{\varphi_m^{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \mid \overline{a} \in A^n, \overline{x} \in \mathcal{V}^n\right\}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ endlich ist, und schätzen Sie die Größe dieser Mengen nach obenhin ab.

Aufgabe 35. In der Vorlesung wurde eine Modellierung von wohlgeformten XML-Dokumenten betrachtet, die nicht FO-definierbar ist.

(a) Erweitern Sie geeignet die Signatur τ_{XML} zu einer Signatur τ'_{XML}, so dass die wohlgeformten XML-Dokumente bzgl. τ'_{XML} FO-definierbar werden.

(b) Geben Sie an, wie ein XML-Dokument als τ'_{XML}-Struktur dargestellt wird.

(c) Geben Sie einen τ'_{XML}-Satz φ an, der genau die wohlgeformten XML-Dokumente definiert.

Aufgabe 36. Definiere $\mathbb{N}\dot{+}\mathbb{Z}$ als $\{(n,0) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(z,1) \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Geben Sie ein Modell der Peanoaxiome ohne dem Induktionsaxiom an, dessen Universum $\mathbb{N}\dot{+}\mathbb{Z}$ ist, also eine Interpretation von 0, s, $+$ und $*$. Dabei soll $\mathbb{N}$ vor $\mathbb{Z}$ kommen:

$$\underline{\quad\mathbb{N}\quad}\ -\,-\,-\qquad -\,-\,-\ \underline{\quad\mathbb{Z}\quad}\ -\,-\,-$$

Achten Sie insbesondere darauf, wie Ihre Multiplikation von $(0,0)$ mit $(z,1)$ definiert ist. Erfüllt Ihr Modell auch das Induktionsaxiom? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Aufgabe 37. Sei τ die Signatur der Peano-Arithmetik zuzüglich einem zweistelligen, infix notierten Relationszeichen $<$. Weiter bezeichne $\mathrm{PA}^<$ die Axiome der Peano-Arithmetik ohne dem Induktionsaxiom aber zuzüglich einer hinreichenden Axiomatisierung von $<$, wie z.B. $\forall x.x < s(x)$. Betrachtet werden folgende Induktionsschemata, wobei ψ eine beliebige Formel bezeichnet.

$$\psi(0) \wedge (\forall x.\psi(x) \to \psi(s(x))) \to \forall x.\psi(x) \tag{Ind_ψ}$$

$$(\forall x.(\forall y.y < x \to \psi(y)) \to \psi(x)) \to \forall x.\psi(x) \tag{$\mathrm{Ind}^<_\psi$}$$

Zeigen Sie, dass

(a) $\mathrm{PA}^< \models \mathrm{Ind}^<_\psi \to \mathrm{Ind}_\psi$.

(b) es eine Formel ψ' gibt mit $\mathrm{PA}^< \models \mathrm{Ind}_{\psi'} \to \mathrm{Ind}^<_\psi$.