Ludwig-Maximilians-Universität München SoSe 2009
Institut für Informatik
PD Dr. Martin Lange
Dipl.-Inf. Markus Latte 9. Juli 2009

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 10
Abgabe bis Freitag, 17. Juli 2009, 12h ct. vor der Übung
Besprechung am 17. Juli 2009

Aufgabe 38. Entscheiden Sie für jede der nachfolgenden Formeln, ob sie intuitionistisch gültig ist. Im positiven Fall geben Sie eine entsprechende Herleitung im intuitionistischen Sequenzenkalkül an; ansonsten eine kurze Begründung, eine entsprechende Herleitung im klassischen Sequenzenkalkül und eine Herleitung im intuitionistischen Sequenzenkalkül für die negative Übersetzung $f(\_)$ der jeweiligen Formel (siehe Folie 246).

(a) $P \wedge \neg P \rightarrow Q$

(b) $(\neg C \wedge D) \vee (A \wedge C) \;\rightarrow\; A \vee D$

(c) $A \wedge D \;\rightarrow\; (\neg C \wedge D) \vee (A \wedge C)$

Aufgabe 39. Finden Sie zu der folgendern Sequenz

$$\neg B, \neg A \rightarrow B, C \rightarrow B, \neg C \rightarrow A, \neg(B \vee C) \rightarrow A \Longrightarrow A$$

einen Beweis

(a) im klassischen Sequenzenkalkül, der eine Sequenz enthält mit mehr als einer Formel im Sukzedent.

(b) im intuitionistischen Sequenzenkalkül.

Aufgabe 40. Die Prädikatenlogik zweiter Stufe (SO) wurde an einigen Stellen in der Vorlesung angesprochen. Eine formale Definition finden Sie auf der Vorlesungsseite bei den Übungsaufgaben.

(a) Geben Sie eine SO-Formel $\phi(x, y)$ über der Signatur gerichteter Graphen an, die ausdrückt, dass es einen Weg von x nach y gibt.

(b) Zeigen Sie, dass die Klassen aller zusammenhängender Graphen SO-definierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Klasse alle wohlgeformten XML-Dokumente mit der Kodierung aus der Vorlesung SO-definierbar ist.

(d) Sei $k \in N$. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt k-färbbar, wenn es eine Abbildung $f : V \rightarrow \{0, \ldots, k-1\}$ gibt, so dass für alle $v, w \in V$ gilt: wenn $(v, w) \in E$ dann $f(v) \neq f(w)$. Zeigen Sie, dass für jedes k die Klasse aller ungerichteten und k-färbbaren Graphen SO-definierbar ist.

Aufgabe 41. Im Rahmen der Gödelschen Unvollständigkeitssätze wurden in der Vorlesung verschiedene Kodierung von Paaren und Listen natürlicher Zahlen angesprochen. Mit einer speziellen Kodierung sollen Sie sich hier auseinandersetzen.

(a) Finden Sie eine bijektive Funktion $\langle \_, \_ \rangle : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die das folgende Gegendiagonal-Schema realisiert.

$$\begin{array}{lllll} \langle 0,3\rangle = 9 & & & & \iddots \\ \langle 0,2\rangle = 5 & \langle 1,2\rangle = 8 & & & \\ \langle 0,1\rangle = 2 & \langle 1,1\rangle = 4 & \langle 2,1\rangle = 7 & & \\ \langle 0,0\rangle = 0 & \langle 1,0\rangle = 1 & \langle 2,0\rangle = 3 & \langle 3,0\rangle = 6 & \end{array}$$

Bestimmen Sie außerdem kurz eine FO-Formel φ, die den Graph der Funktion darstellt, d.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$\langle a, b\rangle = c \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{N}, [x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c] \models \varphi.$$

(b) Definieren Sie mit Hilfe der Formel φ die Graphen der Umkehrfunktionen $\pi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: $\pi_1\langle a, b\rangle = a$ und $\pi_2\langle a, b\rangle = b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

(c) Eine Liste von natürlichen Zahlen $[a_1, \ldots, a_n]$ lässt sich als

$$\langle a_1 + 1, \langle a_2 + 1, \langle \cdots \langle a_n + 1, 0\rangle \cdots \rangle\rangle\rangle.$$

eineindeutig darstellen. Welchem Wert entspricht der Liste $[11, 13, 17]$? Und für welche Liste steht die Zahl 274909?
Hinweis: Eventuell könnte eine Implementierung helfen.

Aufgabe 42. Sei S eine (evtl. unendliche) Menge natürlicher Zahlen. In der Vorlesung und in der Aufgabe 41 wurde die Kodierung *endlicher* Mengen bzw. Listen durch eine natürliche Zahl besprochen. Sie sollen nun eine nichtstandard Zahl a finden, die S kodiert. Seien $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5, \ldots$ eine Aufzählung der Primzahlen und sei τ_c die Signatur der Peano-Arithmetik erweitert um eine Konstante c.

(a) Zeigen Sie, dass die Formelmenge

$$\begin{aligned} T := \Phi_{Peano} &\cup \{c > \underline{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &\cup \{\neg\exists x.\underline{p_k} * x \doteq c \mid k \notin S\} \\ &\cup \{\ \exists x.\underline{p_k} * x \doteq c \mid k \in S\} \end{aligned}$$

über τ_c ein Modell besitzt.
Hinweis: Kompaktheitssatz

Sei $\mathcal{A}$ nun ein Modell von T. Die Menge S ist also kodiert durch $c^{\mathcal{A}}$.

(b) Bestimmen Sie die Formeln φ_n so, dass

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{A} \models \varphi_n\}$$

gilt. Damit ist also eine Dekodierung von c möglich.
Hinweis: Natürlich muss c in φ_n auftreten.