Motivation und Geschichte

- **Geschichte der Logik**
- **Logik und Informatik**

Aufgaben der Logik

Logik (aus Griechischem) = Lehre des vernünftigen Schließens, Kunst des Denkens (ursprünglich)

Logik ist Teilgebiet von Philosophie, Mathematik und Informatik

- Philosophie: liefert Fundament für Argumentationen, formalisiert Wahrheitsbegriff
- Mathematik: formalisiert Beweise
- Informatik: enge Beziehungen zum Begriff der Berechenbarkeit

Ausprägungen

je nach Zuordnung in verschiedener Ausprägung

- Logik der natürlichen Sprache

  beschäftigt sich vor allem mit der Gültigkeit von Argumentationen

- formale Logik oder auch mathematische Logik
  - basiert auf künstlicher Sprache (Formeln)
  - studiert Auswirkungen verschiedener Schlussregeln, etc.

- Umgangsprache

  beschreibt laterales Denken oder rationales Handeln

in dieser Vorlesung: mathematische Logik

Ursprünge der Logik

entstanden in der griechischen Philosophie, insbesondere durch Aristoteles und Euklid

Aristoteles untersuchte Syllogismen (natürlichsprachliche Schlussregeln), mit deren Hilfe eine Aussage aus anderen folgt

Bsp.:

- Aussage 1: “Es regnet.”
- Aussage 2: “Wenn es regnet, dann wird die Straße nass.”

Daraus folgt, dass die Straße nass ist.
Die hier angewandte Schlussregel nennt man Modus Ponens.

Euklids Beweisbegriff

Euklid hat den Begriff des Beweises formalisiert:

Beweis für eine Aussage A ist eine Sequenz $A_0, \ldots, A_n$ von Aussagen, sodass

- $A = A_i$ für ein $i \in \{0, \ldots, n\}$, und
- für alle $i = 0, \ldots, n$ gilt entweder
  - A_i ist Axiom (= unbewiesene Annahme), oder
  - A_i folgt aus $A_0, \ldots, A_{i-1}$ mithilfe von Schlussregeln

liefert relativen Wahrheitsbegriff: Aussage A kann mit gewissen Axiomen und Regeln beweisbar sein, mit anderen jedoch nicht

Euklids Geometrie

für Euklid war Formalisierung des Beweisbegriffs Mittel zum Zweck

interessant für ihn war Geometrie, die er mithilfe von geometrischen und logischen Axiomen (Postulaten) fundiert hat

Bsp.:

- *Zu gegebenem Mittelpunkt und Radius lässt sich ein Kreis zeichnen.*
- *Ist x gleich z und y gleich z, so ist auch x gleich y.*
- ...

Maßgabe für die Wahl der Axiome war, die Wirklichkeit abzubilden, nicht jedoch "eine Geometrie" zu schaffen

Euklids fünftes Postulat

> *Zu einer Gerade g und einem Punkt p außerhalb von g gibt es genau eine Gerade g', die durch p geht und zu g parallel ist.*

erscheint im Vergleich zu anderen Postulaten recht kompliziert $\leadsto$ Versuche, dieses aus anderen Postulaten herzuleiten

alle Versuche misslangen über 2000 Jahre hinweg

erst ca. 1830 ersetzen Bolyai und Lobatschewski dies durch andere Axiome und erhielten – sehr zur Überraschung – widerspruchsfreie Geometrien

bei Lobatschweski z.B. lassen sich mindestens zwei verschiedene, parallele Geraden durch den Punkt ziehen

Logik in der Neuzeit

Kant betrachtete die Wissenschaft der Logik mit Aristoteles Syllogismen als abgeschlossen

nicht jeder hielt sich jedoch an die Vorgabe, z.B. Boole und de Morgan

Boole betrachtete Logik als mathematischen Kalkül mit Werten 0 und 1 (falsch und wahr) und entsprechenden Rechenregeln

sehr bedeutend war Frege, der versuchte, die gesamte Mathematik auf ein logisches Fundament zu stellen – die Mengentheorie; dazu entwickelte er Prädikatenlogik als formale Sprache und entsprechende Beweissysteme

Russell und Zermelo fanden in Freges Mengentheorie jedoch einen Widerspruch

Die Russellsche Antinomie

Def.: Sei M die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten.

Frage: Enthält M sich selbst?

dasselbe Prinzip:

- Martin sagt "Martin lügt". Spricht er die Wahrheit, oder lügt er?
- In einem Dorf gibt es einen Barbier, der alle Dorfbewohner rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert er sich selbst?

Auswege für die Mathematik:

- Typtheorie von Russell und Whitehead
- Mengenlehre von Zermelo

Weitere bedeutende Logiker und ihre Arbeiten

- Gentzen: System des natürlichen Schließens und Sequenzenkalkül
- Löwenheim und Skolem: Semantik der Prädikatenlogik
- Gödel: Vollständigkeit der Prädikatenlogik erster Stufe und Unvollständigkeit der Arithmetik
- Tarski: ebenfalls Prädikatenlogik

Logik für die Informatik

Entwicklungen in der Logik haben maßgeblich zur Entwicklung der Informatik beigetragen

- Boolesche Algebra und Schaltkreise
- Hilberts Programm: wollte gesamte Mathematik logisch fundieren und Konsistenz bewiesen sehen; Unmöglichkeit dessen von Gödel gezeigt
- Unentscheidbarkeit des Entscheidungsproblems für Prädikatenlogik erster Stufe durch Turing und Church gezeigt; Entwicklung der Turing-Maschine (= abstrakter, universeller Computer)

Logik in der Informatik

- Rechnerarchitektur: Schaltkreise und logische Formeln; Aussagenlogik
- logische Programmiersprachen wie z.B. Prolog
- Programmverifikation: operationelle Semantik eines Programms als mathematische Struktur, erwünschte Eigenschaft des Programms als logische Formel; meist spezialisierte Logiken
- Datenbanktheorie: Datenbank wiederum als mathematische Struktur, Anfragen daran als Auswertung einer logischen Formel darin; meist Prädikatenlogik
- Wissensrepräsentation: Wissen durch Formeln beschrieben, Herleitung von neuem Wissen durch logische Herleitungen darauf; meist spezialisierte Logiken
- ...

Informatik für die Logik

leistungsstarke Rechner und Software haben auch zu entscheidenden Entwicklungen in der Logik beigetragen

- Theorembeweiser erlauben das Finden und Überprüfen sehr großer Beweise
- Beweis des 4-Farben-Satzes: erst Reduktion von unendlich vielen auf endlich viele Fälle, dann Überprüfung derer mit einem Computer
- SAT-Solver: mittlerweile sehr leistungsstarke Tools zum Lösen des Erfüllbarkeitsproblems der Aussagenlogik, dadurch auch besonders interessant
- ...

Facetten der Logik

zwei Arten, den Begriff der Wahrheit in einer formalen Logik zu erklären

- Modelltheorie: Semantik wird gegeben durch Interpretation von Formeln in Modellen
- Beweistheorie: Semantik wird gegeben durch Axiome und Beweisregeln

hier: beides