Motivation der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zur Erinnerung: "1. Stufe" bedeutet, dass nur über Elemente des Universums quantifiziert werden kann.

Betrachte das Partnersuche-Problem: Gegeben sind n Männer und n Frauen, die alle auf Partnersuche sind. Nach einer Kennenlernphase hat jede(r) Präferenzen entwickelt, die jeweils einige Vertreter des anderen Geschlechts als mögliche Partner in Frage kommen lassen, andere aber ausschließen. Jetzt soll eine 1-1-Zuordnung zwischen den Männern und Frauen gefunden werden, die alle Präferenzen berücksichtigt.

Abstrakt betrachtet: Geg. gerichteter, bipartiter Graph $G = (V_0, V_1, E)$, gibt es eine symmetrische Kantenmenge $M \subseteq E$, die eine Bijektion von V_0 nach V_1 darstellt?

Prädikatenlogik 2. Stufe

Prädikatenlogik 2. Stufe (SO) erweitert FO um Variablen $X, Y, \ldots$ für Relationen und Quantoren darüber. Eine zweitstufige Variable X hat implizit eine Stelligkeit $st(X)$.

Syntax wie bei FO mit zusätzlich:

- Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und X zweitstufige Variable mit $st(X) = n$, so ist $X(t_1, \ldots, t_n)$ eine SO-Formel.
- Ist φ eine SO-Formel, so sind $\exists X.\varphi$ und $\forall X.\varphi$ SO-Formeln.

Semantik wie bei FO, wobei die Variablenbelegung ϑ zusätzlich die zweitstufigen Variablen durch Relationen auf dem Universum interpretiert, z.B.

$$\mathcal{A}, \vartheta \models X(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{gdw.} \quad ([\![t_1]\!]^{\mathcal{A}}_{\vartheta}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathcal{A}}_{\vartheta}) \in \vartheta(X)$$

$$\mathcal{A}, \vartheta \models \exists X.\varphi \quad \text{gdw.} \quad \text{es gibt } R \subseteq A^{st(X)} \text{ mit } \mathcal{A}, \vartheta[X \mapsto R] \models \varphi$$

Das Partnersucheproblem in SO

Das oben genannte Partnersucheproblem lässt sich in SO definieren.

Signatur $\tau = (V_0, V_1, E)$, wobei V_0, V_1 einstellig, E zweistellig.

$$\begin{aligned}
\exists M.\Big(&\forall x.\forall y.M(x,y) \rightarrow E(x,y) \\
&\wedge \forall x.\forall y.M(x,y) \rightarrow M(y,x) \\
&\wedge \forall x.\forall y.\forall z.\big(\ (M(x,y) \wedge M(x,z) \rightarrow y \doteq z) \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge (M(y,x) \wedge M(z,x) \rightarrow y \doteq z)\ \big) \\
&\wedge \forall x.(\exists y.M(x,y)) \wedge \exists y.M(y,x)\ \Big)
\end{aligned}$$

Resultate über SO

- Es gibt keine vollständige Axiomatisierung von SO.
- EF-Spiele können leicht auf SO erweitert werden. (Aber Beweise, dass **D** ein Spiel $\mathcal{G}$ gewinnt, werden typischerweise aufgrund der exponentiell vielen Zugmöglichkeiten sehr kompliziert.)
- Es gibt nicht-triviale, entscheidbare Fragmente von SO (z.B. Monadisches SO auf Listen oder Bäumen).
- ...