

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 3

Abgabe bis Freitag, 15. Mai 2009, 12h ct. vor der Übung
Besprechung am Freitag, 15. Mai 2009

Falls mindestens 15 Personen ihre Übungsblätter sinnvoll bearbeitet abgeben, werden wir Musterlösungen zu den Blättern 1 bis 3 im Netz veröffentlichen. Dieses Angebot soll Sie lediglich zur Abgabe ermutigen. In jedem Fall werden die Übungsblätter in den Übungsstunden besprochen.
Dieses Prinzip wird solange beibehalten, bis es von einem anderen Prinzip abgelöst wird.

Aufgabe 7. Entscheiden Sie mittels des DPLL-Algorithmuses, ob die folgenden Klauselmengen erfüllbar sind. Geben Sie wesentliche Zwischenschritte an.

- (a) $\{\{A, B, C, D, E, F\}, \{\neg C\}, \{C, \neg A\}\}$
- (b) $\{\{A, \neg B, C, \neg D, \neg E, \neg F\}, \{\neg C\}, \{C, \neg A\}\}$
- (c) $\{\{\neg A, B\}, \{C, \neg B\}, \{\neg C, E, F\}, \{\neg E, F\}, \{E, \neg F\}, \{\neg E, \neg F\},$
 $\{A, B, C, D\}, \{\neg D, B\}, \{A, \neg D, C\}\}$

Hinweis: Achten Sie nicht nur auf eine geeignete Wahl der Variablen, sondern auch auf eine geeignete Setzung, also ob Sie mit $\mathcal{C}[\top/A]$ oder $\mathcal{C}[\perp/A]$ rekursive weiterarbeiten.

Aufgabe 10. In dieser Aufgabe soll das Lemma von König mittels des Kompaktheitssatzes gezeigt werden:

Jeder endlich verzweigende Baum mit Wurzel w , in dem beliebig lange in w beginnende Pfade existieren, hat einen unendlichen Pfad, der in w beginnt.

Dabei ist ein Pfad eine Folge von Knoten im Baum, so dass jede zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Knoten in Eltern-Kind-Beziehung stehen.

Sei $\mathcal{T}$ nun ein Baum entsprechend der Voraussetzungen des Lemmas und K seine Knotenmenge. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei E_n die Menge der Knoten auf Ebene n , also

$$E_n := \{k \in K \mid \text{es gibt einen Pfad der Länge } n \text{ von } w \text{ nach } k\}.$$

- (a) Begründen Sie kurz, warum E_n endlich ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für jeden Knoten k gebe es eine Variable X_k .

- (b) Finden Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel ε_n , die besagt, dass unter den Variablen $\{X_k \mid k \in E_n\}$ genau eine wahr ist.

Setze $\Phi := \{\varepsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{X_k \rightarrow X_v \mid k \text{ ist ein Kind von } v\}$.

- (c) Zeigen Sie, dass jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.
- (d) Zeigen Sie mittels des Kompaktheitssatzes, dass $\mathcal{T}$ einen unendlichen Pfad besitzt.
- (e) Warum ist eine entsprechende Formulierung des Lemma von König für unendlich verzweigende Bäume falsch? Finden Sie ein Gegenbeispiel! Wo geht in Ihrem Beweis des Lemmas von König der endliche Verzweigungsgrad ein?

Aufgabe 11. Finden Sie Resolutionsbeweise für die Unerfüllbarkeit der folgenden Klauselmengen bzw. Formeln.

- (a) $\{\{A\}, \{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{\neg C, D\}, \{\neg D\}\}$.
- (b) $\{\{A\}, \{\neg A, B, C\}, \{\neg B, C\}, \{\neg C\}\}$.
- (c) $\{\{\neg A, B\}, \{C, \neg B\}, \{\neg C, E, F\}, \{\neg E, F\}, \{E, \neg F\}, \{\neg E, \neg F\},$
 $\{A, B, C, D\}, \{\neg D, B\}, \{A, \neg D, C\}\}$

- (d) $(P_{1,1} \vee P_{1,2}) \wedge (P_{2,1} \vee P_{2,2}) \wedge (P_{3,1} \vee P_{3,2}) \wedge$
 $\neg(P_{1,1} \wedge P_{2,1}) \wedge \neg(P_{1,1} \wedge P_{3,1}) \wedge \neg(P_{2,1} \wedge P_{3,1}) \wedge$
 $\neg(P_{1,2} \wedge P_{2,2}) \wedge \neg(P_{1,2} \wedge P_{3,2}) \wedge \neg(P_{2,2} \wedge P_{3,2})$

Hinweise: 1. $P_{i,j}$ kann verstanden werden als die Aussage, dass Taube i im Taubenloch j sitzt. Die gesamte Formel behauptet, dass drei Tauben auf zwei Taubenlöcher verteilt werden können, ohne dass zwei Tauben sich eines teilen müssen.

2. Der Resolutionsbaum ist groß.

Zeigen Sie mit Hilfe der Resolution, dass

- (e) $\neg(B \rightarrow A) \vee \neg\neg D \vee (A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (A \wedge C)$ allgemeingültig ist und

- (f) $\{\{\neg A, \neg B\}, \{\neg A, B\}, \{A, \neg B\}\}$ erfüllbar ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es einen Resolutionsbeweis der Höhe n gibt und führen Sie dies zu einem Widerspruch. Betrachten Sie dazu den jeweils letzten Resolutionsschritt in dem Baum.

Lösungsvorschlag. (a)

$$\frac{A \quad \frac{\neg A, B \quad \frac{\neg B, C \quad \frac{\neg C, D \quad \neg D}{\neg C}}{\neg B}}{\neg A}}{\emptyset}$$

- (b)

$$\frac{A \quad \frac{\neg A, B, C \quad \neg C}{\neg A, B} \quad \frac{\neg B, C \quad \neg C}{\neg B}}{\neg A} \quad \emptyset$$

- (c) Siehe Fig. 1.

- (d) Siehe Fig. 1; die Klauseln sind von [1] bis [9] durchnummeriert.

- (e) Es reicht eine Resolutionswiderlegung zu finden für $\{\neg B, A\}, \{\neg D\}, \{\neg A, C, D\}, \{B, D\}, \{\neg A, \neg C\}$:

$$\frac{\neg A, \neg C \quad \frac{\neg A, C, D \quad \neg D}{\neg A, C} \quad \frac{\neg B, A \quad \frac{B, D \quad \neg D}{B}}{A}}{C} \quad \frac{\neg A \quad C}{\emptyset} \quad A \text{ (s.o.)}$$

- (f) Nach dem Korrektheitsatz reicht es zu zeigen, dass es keinen Resolutionsbaum gibt mit Blättern aus $\mathcal{K} := \{\{\neg A, \neg B\}, \{\neg A, B\}, \{A, \neg B\}\}$ und $\emptyset$ an der Wurzel. Informell kann man dazu wie folgt argumentieren: Angenommen, es gebe doch einen Resolutionsbeweis zu $\mathcal{K}$. Eine sukzessive Fallunterscheidung nach der jeweils letzten Variable, über die resolviert wurde, zeigt einen unendlichen Pfad auf, auf dem nur Klauseln der Form $\emptyset, \{A\}, \{B\}$ und $\{A, B\}$ stehen. Ein Resolutionsbeweis muss aber endlich sein. Formal, kann man die Nichtexistenz eines Resolutionsbeweis für $\mathcal{K}$ wie folgt umschreiben. (Für $C = \emptyset$ folgt dann nach dem einleitenden Satz die Behauptung in der Aufgabenstellung.)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $C \subseteq \{A, B\}$ gibt es keinen Resolutionsbaum der Höhe n mit Wurzel C , deren Blätter Klauseln in $\mathcal{K}$ sind.

Diese Formulierung lässt einen Induktionsbeweis¹ (über n) zu. Induktionsbasis $n = 0$: Dann würde ein Resolutionsbaum aus einem einzigen Blatt bestehen. Nur, für kein $C \subseteq \{A, B\}$ ist $C \in \mathcal{K}$. Widerspruch. Induktionsschritt von $0, \dots, n$ auf $n+1$: Sei $C \subseteq \{A, B\}$ und sei zum Widerspruch π ein Resolutionsbaum der Höhe $n+1$ mit Wurzel C und Blättern in $\mathcal{K}$. Eine einfache Fallunterscheidung nach C ($\emptyset, \{A\}, \{B\}$ und $\{A, B\}$) sowie nach der Variable des letzten Resolutionsschritts (A oder B) zeigt, dass es einen Teilbaum π' gibt mit einer Klausel $D \subseteq \{A, B\}$ an seiner Wurzel. Da die Höhe von π' höchstens n ist, steht die

¹genauer eine Werteverlaufsinduktion

$$\frac{\frac{\frac{A, B, C, D}{A, B, C} \quad \frac{-D, B}{C, \neg B}}{A, C} \quad \frac{-B}{\neg C, E} \quad \frac{\frac{-C, E, F}{\neg F} \quad \frac{-E, \neg F}{E, \neg F}}{\neg E, F}}{\neg E}$$
[illegible]

3

Existenz von π' im Widerspruch zur Induktionshypothese. Also gibt es den angenommen Resolutionsbaum π der Höhe n nicht.

Nota bene: In den angenommenen Resolutionsbeweisen können wir davon ausgehen, dass höchstens über die Variablen A und B resolviert wird. Denn angenommen, an einer Stelle wird über eine andere Variable X resolviert, so muss X in einer der Prämissen auftreten. Diese Variable können wir aber in Richtung der Blätter verfolgen: bei jedem Resolutionschritt, in dem X in der Konklusion auftritt, kommt X auch in einer der Prämissen vor. Letztendlich taucht X in einem Blatt auf. Doch keine Klausel in $\mathcal{K}$ enthält X .

Fazit: Die Frage nach der Erfüllbarkeit könnte wesentlich einfacher durch die Angabe eines entsprechenden Modells gelöst werden. Mit dieser Aufgabe sollten Sie sich aber primär mit der Struktur und der Analyse von Resolutionsbeweisen vertraut machen sowie Induktionsbeweise wiederholen.

Aufgabe 12. Das Resolutionskalkül sei um die sogenannte Weakening²-Regel

$$\frac{C}{D}$$

erweitert, wobei C und D Klauseln mit $C \subseteq D$ bezeichnen.

- (a) Die Klausel C sei wie folgt aus den Klauseln C_1 und C_2 resolviert, wobei $\neg X \in C_1$ und $X \in C_2$ sei.

$$\frac{C_1 \quad \frac{C_2}{C_2 \cup \{Y\}} \text{ (Weakening)}}{C} \text{ (Resolution)}$$

Zeigen Sie, dass es auch eine Resolution von C aus C_1 und C_2 gibt, so dass Weakening höchstens als unterste Regelanwendung vorkommt. Was ist zu beachten, wenn X und Y die gleiche Variable bezeichnen?

- (b) Zeigen Sie, dass in jedem Resolutionsbeweis mit Weakening, die Vorkommen von Weakening zur Wurzel verschoben werden können.
(c) Begründen Sie kurz, warum ein Weakening an einer Wurzel mit $\emptyset$ entfernt werden kann.

Wir möchten nun mit Hilfe der Weakening-Regel die Vollständigkeit der Resolution zeigen. Dazu sei $\mathcal{K}$ eine Menge von Klauseln über einer endlichen Variablenmenge X . Weiter wählen wir folgende Klauselmengen.

$$\mathcal{K}' := \{D \mid D \supseteq C \in \mathcal{K}, D \text{ tautologiefrei und } \text{Var}(D) = X\} \text{ und} \\ \mathcal{X} := \{D \mid D \text{ tautologiefrei und } \text{Var}(D) = X\}.$$

Eine Klausel heißt *tautologiefrei*, wenn sie keine Variable sowohl positiv als auch negativ enthält. Zeigen Sie folgende Behauptungen **ohne** Verwendung der Vollständigkeit der Resolution.

- (d) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}'$, falls $\mathcal{K}$ unerfüllbar.
(e) Es gibt einen Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{X}$.

Hinweis: Induktion über die Größe von X .

Zeigen sie weiter ohne Rückgriff auf die Vollständigkeit der Resolution, dass, falls $\mathcal{K}$ unerfüllbar ist, Resolutionsbeweise existieren ...

- (f) ... mit Weakening für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{K}'$.
(g) ... mit Weakening für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{K}$.
(h) ... ohne Weakening für die Unerfüllbarkeit $\mathcal{K}$.

Lösungsvorschlag. (a) Im gegebenen Beispiel ist $C = (C_1 \setminus \{\neg X\}) \cup (C_2 \cup \{Y\} \setminus \{X\})$. Falls $X \neq Y$, so ist $C = ((C_1 \setminus \{\neg X\}) \cup (C_2 \setminus \{X\})) \cup \{Y\}$. Also:

$$\frac{\frac{C_1}{(C_1 \setminus \{\neg X\}) \cup (C_2 \setminus \{X\})} \text{ (Resolution)} \quad C_2}{\underbrace{((C_1 \setminus \{\neg X\}) \cup (C_2 \setminus \{X\})) \cup \{Y\}}_{\equiv C}} \text{ (Weakening)}$$

²engl. für Abschwächung

Andernfalls ist $X = Y$. Hier haben wir dann $C = (C_1 \setminus \{\neg X\}) \cup (C_2 \setminus \{X\})$:

$$\frac{\frac{C_1}{C = (C_1 \setminus \{\neg X\}) \cup (C_2 \setminus \{X\})} \quad \frac{C_2}{C = (C_1 \setminus \{\neg X\}) \cup (C_2 \setminus \{X\})}}{\text{(Resolution)}}$$

- (b) Um die Weakening-Instanzen zur Wurzel zu verschieben, reicht es zu zeigen, dass Weakening-Instanzen schrittweise unter die Resolutions-Instanzen geschoben werden können. Die Teilaufgabe (a) zeigt einen Spezialfall. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, sieht die allgemeine Situation wie folgt aus:

$$\frac{\frac{\frac{C_1}{D_1} \text{ (Weakening)}}{(D_1 \setminus \{X\})} \quad \frac{\frac{C_2}{D_2} \text{ (Weakening)}}{(D_2 \setminus \{\neg X\})}}{\underbrace{\cup}_{=:C}} \text{ (Resolution)}$$

Es müssen nicht beide Weakening-Instanzen vorhanden sein; in diesem Fall ist $C_1 = D_1$ beispielsweise. Weiter sei $X \in D_1$ und $\neg X \in D_2$; der symmetrische Fall ist analog.

Falls $X \in D_1 \setminus C_1$, dann reicht ein Weakening-Regel aus, um C aus C_1 zu erhalten, denn $C_1 \subseteq D_1 \setminus \{X\} \subseteq C$. Ebenso kann man C aus C_2 gewinnen falls $\neg X \in D_2 \setminus C_2$. Es bleibt der Fall, dass $X \notin D_1 \setminus C_1$ und $\neg X \notin D_2 \setminus C_2$. Also liegt X in C_1 und $\neg X$ in C_2 , da die Resolutionsregel (bis uns) nur anwendbar ist, wenn $X \in D_1$ und $\neg X \in D_2$. Hier reicht eine Resolution zwischen C_1 und C_2 bzgl. X , gefolgt von der Weakening-Regel, denn $C_1 \setminus \{X\} \subseteq D_1 \setminus \{X\}$, $D_1 \setminus \{\neg X\} \subseteq D_2 \setminus \{\neg X\}$ und damit $(C_1 \setminus \{X\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg X\}) \subseteq C$. Zusammengefasst ergibt sich folgendes Bild:

Fall	$X \in D_1 \setminus C_1$	$X \in D_2 \setminus C_2$	$X \notin D_1 \setminus C_1$ und $\neg X \notin D_2 \setminus C_2$
Beweisfigur	$\frac{C_1}{C}$	$\frac{C_2}{C}$	$\frac{\frac{C_1}{(C_1 \setminus \{X\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg X\})} \quad \frac{C_2}{(C_1 \setminus \{X\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg X\})}}{C}$

Damit haben wir gesehen, dass die Weakening-Regel immer nach unten geschoben werden kann. Führt man diesen Schritt auf einem Resolutionbaum von den Blättern beginnend zur Wurzel hin aus, erhält man einen Resolutionsbaum, bei dem die Weakening-Instanzen nur noch gesammelt am Block an der Wurzel auftreten.

- (c) Wenn die unterste Regel die Weakening-Regel ist, hat diese die Form $\frac{C}{\emptyset}$ mit $C \subseteq \emptyset$. Also ist $C = \emptyset$. Somit kann diese Regel entfernt werden. Dieses Verfahren kann man iterieren, bis die unterste Regel keine Weakening-Regel mehr ist.

Fazit: Ein Resolutionsbaum mit Weakening für die Unerfüllbarkeit einer Klauselmengen $\mathcal{K}$ wird durch (b) und (c) in einen Resolutionsbaum für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{K}$ überführt, der die Weakening-Regel nicht mehr verwendet. Also ist die Weakening-Regel eine zulässige Regel.

- (d) Sei $\mathcal{K}$ unerfüllbar und $D \in \mathcal{X}$. Zu zeigen: $D \in \mathcal{K}'$. Wähle die Interpretation $\mathcal{I}$ durch

$$\mathcal{I}(Z) = \begin{cases} \text{ff} & \text{wenn } Z \in D \\ \text{tt} & \text{wenn } \neg Z \in D \end{cases}$$

für alle Variablen $Z \in X$. Diese Setzung ist wohldefiniert. Denn wären sowohl Z als auch $\neg Z$ in D , wäre D nicht tautologiefrei, im Widerspruch zur Definition von $\mathcal{X}$. Weiter ist $\mathcal{I}$ total für X , da $\text{Var}(D) = X$ nach Wahl von $\mathcal{X}$.

Nun ist nach Wahl der Interpretation $\mathcal{I}$, sie kein Modell von D . Da $\mathcal{K}$ nach Annahme unerfüllbar ist, gilt insbesondere $\mathcal{I} \not\models \mathcal{K}$. Also gibt eine Klausel $C \in \mathcal{K}$ mit $\mathcal{I} \not\models C$. Es reicht $C \subseteq D$ zu zeigen; denn dies impliziert $D \in \mathcal{K}'$, da D ja tautologiefrei ist. Sei also ℓ ein Literal in C . Da $\mathcal{I}$ kein Modell von C ist, gilt auch $\mathcal{I} \not\models \ell$. Nach Wahl von $\mathcal{I}$, ist aber $\ell \in D$; also $C \subseteq D$.

- (e) Notation: $X_n = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei die Z s (verschiedene) Variablen bezeichnen, so dass $X_{|X|} = X$.³ Wir zeigen per Induktion über n , dass es einen Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{X}_n$, also von $\{D \mid D \text{ tautologiefrei und } \text{Var}(D) = X_n\}$ gibt. Induktionsbasis $n = 0$: Da $\mathcal{X}_0 = \{\emptyset\}$, gibt es trivialerweise einen entsprechenden Resolutionsbeweis. Induktionsschritt von n auf $n + 1$. Nach Induktionshypothese gibt es einen Resolutionsbeweis π für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{X}_n$. Wir müssen einen

³In anderen Worten: wir wählen uns eine Aufzählung der Variablen in X und setzen diese beliebig fort. Diese Aufzählung ist dann $Z_1, \dots, Z_{|X|}, \dots$. Für $n = |X|$ liefert die nachstehende Aussage also die Behauptung in der Aufgabenstellung.

Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{X}_{n+1}$ finden. Nun ist aber $\mathcal{X}_{n+1} = \{D \cup \{X_{n+1}\} \mid D \in \mathcal{X}\} \cup \{D \cup \{\neg X_{n+1}\} \mid D \in \mathcal{X}\}$. Wenn wir in π in jeder Klausel X_{n+1} hinzufügen, erhalten wir einen Resolutionsbeweis π^+ , wobei an der Wurzel $\{X_{n+1}\}$ (statt $\emptyset$) steht und an den Blättern höchstens Klauseln aus $\mathcal{X}_{n+1}$. Analog ist π^- gemeint, nur dass hier $\{\neg X_{n+1}\}$ an der Wurzel stehen soll. Eine Resolution über X_{n+1} mit den beiden Teilen π^+ und π^- liefert den verlangten Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{X}_{n+1}$.

- (f) Nach (e) gibt es einen Resolutionsbeweis π für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{X}$. Dieser Resolutionsbeweis verwendet an den Blättern nur Klauseln aus $\mathcal{X}$. Da $\mathcal{K}$ als unerfüllbar angenommen wird, gilt mit (d) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}'$. Also ist π auch ein Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{K}'$.
Nota bene: Weakening wird hier nicht benötigt.
- (g) Jedes Blatt im obigen Resolutionsbeweis π ist mit einer Klausel D in $\mathcal{K}'$ beschriftet, also mit $D \subseteq C$ für eine Klausel C aus $\mathcal{K}$. Daher kann das Blatt mit der Klausel D ersetzt werden durch

$$\frac{C}{D} \text{ (Weakening)}$$

Damit ergibt sich eine Resolutionsbeweis π' für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{K}$, evtl. mit Weakening.

- (h) Mit (b) können alle Instanzen der Weakening-Regel von π' zur Wurzel verschoben werden. Mit (c) können diese neuen Vorkommen auch weggelassen werden. Wir erhalten also einen Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{K}$ ohne Weakening.

Fazit: Die Weakening-Regel ist eine zulässige Regel und ermöglicht einen Vollständigkeitsbeweis (als Alternative zum Beweis aus der Vorlesung).