

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 5

Abgabe bis Freitag, 5. Juni 2009, 12h ct. vor der Übung
 Besprechung am 5. Juni 2009

Aufgabe 17. Entscheiden Sie, ob die folgenden Formeln jeweils Tautologien sind. Im positiven Fall geben Sie einen Beweis im Sequenzkalkül an. Andernfalls finden Sie ein Gegenbeispiel bestehend aus einer Signatur und einer Struktur!

- (a) $(\exists x.\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x.\varphi) \vee (\exists x.\psi).$
- (b) $(\exists x.\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\exists x.\varphi) \wedge (\exists x.\psi).$
- (c) $(\exists x.\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\exists x.\varphi) \wedge (\exists x.\psi),$ falls $x \notin \text{frei}(\psi).$
- (d) $(\forall x\exists y.\psi) \rightarrow \exists y\forall x.\psi.$
- (e) $(\exists y\forall x.\psi) \rightarrow \forall x\exists y.\psi.$
- (f) $(\neg\exists x.\varphi) \leftrightarrow \forall x.\neg\varphi.$

Lösungsvorschlag. (f)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi[c/x] \Rightarrow \varphi[c/x]}{\Rightarrow \varphi[c/x], \neg\varphi[c/x]} (\neg_R) \quad \frac{\varphi[c/x] \Rightarrow \varphi[c/x]}{\varphi[c/x], \neg\varphi[c/x] \Rightarrow} (\neg_L) \\
 \frac{\Rightarrow \varphi[c/x], \neg\varphi[c/x]}{\Rightarrow \exists x.\varphi, \neg\varphi[c/x]} (\exists_R) \quad \frac{\varphi[c/x], \neg\varphi[c/x] \Rightarrow}{\varphi[c/x], \forall x.\neg\varphi \Rightarrow} (\forall_L) \\
 \frac{\Rightarrow \exists x.\varphi, \neg\varphi[c/x]}{\Rightarrow \exists x.\varphi, \forall x.\neg\varphi} (\forall_R) \quad (c \text{ neu}) \quad \frac{\varphi[c/x], \forall x.\neg\varphi \Rightarrow}{\exists x.\varphi, \forall x.\neg\varphi \Rightarrow} (\exists_L) \quad (c \text{ neu}) \\
 \frac{\Rightarrow \exists x.\varphi, \forall x.\neg\varphi}{\neg\exists x.\varphi \Rightarrow \forall x.\neg\varphi} (\neg_L) \quad \frac{\exists x.\varphi, \forall x.\neg\varphi \Rightarrow}{\forall x.\neg\varphi \Rightarrow \neg\exists x.\varphi} (\neg_R) \\
 \hline
 \Rightarrow (\neg\exists x.\varphi) \leftrightarrow \forall x.\neg\varphi \quad (\leftrightarrow_R)
 \end{array}$$

Aufgabe 18. Bestimmen Sie zu folgenden Formeln zuerst eine ihrer Pränex- und anschließend eine ihrer Skolem-Normalformen.

- (a) $\neg\forall y.\neg((\forall x.P(x, y)) \wedge ((\neg\exists y.P(y, y)) \rightarrow P(y, y)))$
- (b) $\exists x.\forall y.\forall z.\neg(P(x, y) \wedge P(y, z))$
- (c) $\forall x.\neg P(x, x) \rightarrow \neg\exists y.\forall z.P(y, z) \rightarrow \neg P(x, z)$
- (d) $\forall x.(\neg\exists y.P(x, y)) \leftrightarrow (\neg\exists z.P(z, x))$

Lösungsvorschlag. (d) Umwandlung in Pränex-Normalform:

$$\begin{aligned}
& \forall x.(\neg \exists y.P(x, y)) \leftrightarrow (\neg \exists z.P(z, x)) \\
& \iff \forall x.((\neg \exists y.P(x, y)) \rightarrow \neg \exists z.P(z, x)) \wedge & (\leftrightarrow \text{ auflösen}) \\
& \quad ((\neg \exists z.P(z, x)) \rightarrow \neg \exists y.P(x, y)) \\
& \iff \forall x.((\forall y.\neg P(x, y)) \rightarrow \neg \exists z.P(z, x)) \wedge & (\exists \text{ in den Prämissen vorziehen}) \\
& \quad ((\forall z.\neg P(z, x)) \rightarrow \neg \exists y.P(x, y)) \\
& \iff \forall x.(\exists y.(\neg P(x, y)) \rightarrow \neg \exists z.P(z, x)) \wedge & (\forall \text{ in den Prämissen vorziehen}) \\
& \quad (\exists z.(\neg P(z, x)) \rightarrow \neg \exists y.P(x, y)) \\
& \iff \forall x.\exists y.\exists z. & (\exists \text{ vorziehen}) \\
& \quad ((\neg P(x, y)) \rightarrow \neg \exists z.P(z, x)) \wedge \\
& \quad ((\neg P(z, x)) \rightarrow \neg \exists y.P(x, y)) \\
& \iff \forall x.\exists y.\exists z. & (\exists \text{ in den Konklusionen vorziehen}) \\
& \quad ((\neg P(x, y)) \rightarrow \forall z.\neg P(z, x)) \wedge \\
& \quad ((\neg P(z, x)) \rightarrow \forall y.\neg P(x, y)) \\
& \iff \forall x.\exists y.\exists z. \\
& \quad ((\neg P(x, y)) \rightarrow \forall z'.\neg P(z', x)) \wedge & (\text{gebundene Variablen umbenennen}) \\
& \quad ((\neg P(z, x)) \rightarrow \forall y'.\neg P(x, y')) \\
& \iff \forall x.\exists y.\exists z.\forall z'.\forall y'. & (\forall \text{ in den Konklusion vorziehen}) \\
& \quad ((\neg P(x, y)) \rightarrow \neg P(z', x)) \wedge \\
& \quad ((\neg P(z, x)) \rightarrow \neg P(x, y'))
\end{aligned}$$

Umwandlung in Skolem-Normalform:

$$\begin{aligned}
& \iff \forall x.\forall z'.\forall y'. \\
& \quad ((\neg P(x, f(x))) \rightarrow \neg P(z', x)) \wedge \\
& \quad ((\neg P(g(x), x)) \rightarrow \neg P(x, y'))
\end{aligned}$$

wobei f und g neue, jeweils einstellige Funktionssymbole sind.

Aufgabe 19. Ein Formel heißt *termreduziert*, wenn sie nur atomare Formeln der Form $x \doteq y$, $R(x_1, \dots, x_n)$ und $f(x_1, \dots, x_n) \doteq y$ enthält, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $y, x_1, \dots$ Variablen bezeichnen. Zeigen Sie, dass es zu jeder Formel φ eine äquivalente termreduzierte Formel gibt, dessen Größe linear in der Größe von φ beschränkt ist.

Aufgabe 20. Bestimmen Sie, welche der folgenden Relationen in der jeweiligen Strukturklasse definierbar sind. Im positiven Fall geben Sie eine definierende Formel an und im negativen Fall eine kurze informelle Begründung dafür.

- (a) Die übliche Kleiner-Relation, $<$, in den Strukturklassen $\{(\mathbb{N}, +)\}$, $\{(\mathbb{Z}, +)\}$ und $\{(\mathbb{Q}, +, \cdot)\}$.
- (b) Die Relationen $\text{isPrim}(x)$ und $\text{ggT}(x, y, z)$ jeweils in $\{(\mathbb{N}, +, \cdot)\}$ und $\{(\mathbb{N}, \cdot)\}$. Die Relationen stehen für einen Primzahltest und den größten gemeinsamen Teiler der ersten beiden Argumenten.

Die Funktionen $+$ und $\cdot$ bezeichnen die übliche Addition und Multiplikation der jeweiligen Klasse.

Lösungsvorschlag. (b) Sei $x \mid y$ eine Abkürzung für $(\exists z.x \cdot z = y)$; informell “ x teilt y ”. Analog sei $x \leq y$ kurz für $(\exists z.x + z = y)$.

Strukturklasse $\{(\mathbb{N}, +, \cdot)\}$.

$$\text{isPrim}(x) := \exists w. w \cdot w \dot{=} w \wedge \neg x \dot{=} w \wedge \forall y. \forall z. x \dot{=} y \cdot z \rightarrow y \dot{=} w \vee y \dot{=} w$$

$$\begin{aligned} \text{ggT}(x, y, z) := & (\exists u. \exists w. z \mid x \wedge z \mid y) \wedge \\ & \forall z'. (z' \mid x \wedge z' \mid y) \rightarrow z' \leq z \end{aligned}$$

In der Definition von isPrim wird w an die Eins gebunden. In der Definition von ggT besagt die erste Zeile, dass z ein gemeinsamer Teiler von x und y , und die zweite Zeile, dass z auch der größte gemeinsame Teiler ist.

Strukturklasse $\{(\mathbb{N}, \cdot)\}$. Hier kann $\text{isPrim}(x)$ wie oben definiert werden. Jedoch muss die definierende Formel von ggT überarbeitet werden, da es durch $\leq$ die Addition verwendet. Es reicht *in diesem Fall* aber, $\leq$ durch die Teilbarkeitsrelation zu ersetzen.

$$\begin{aligned} \text{ggT}(x, y, z) := & (\exists u. \exists w. z \mid x \wedge z \mid y) \wedge \\ & \forall z'. (z' \mid x \wedge z' \mid y) \rightarrow z' \mid z \end{aligned}$$

Begründung: Sei θ eine Variablenbelegung. Falls $\mathcal{I}, \theta \models \text{ggT}(x, y, z)$ dann ist $\theta(z)$ der größte gemeinsame Teiler von $\theta(x)$ und $\theta(y)$, da $z' \mid z$ auch $z' \leq z$ impliziert. Andererseits sei $\theta(z)$ der größte gemeinsame Teiler von $\theta(x)$ und $\theta(y)$. Sei g ein gemeinsamer Teiler von $\theta(x)$ und $\theta(y)$. Dann teilt g aber auch $\theta(z)$, da jeder Primfaktor von g (und auch jede Primzahlpotenz, die g teilt) in $\theta(x)$ und $\theta(y)$ aufgehen muss; also enthält auch der größte gemeinsame Teiler $\theta(x)$ und $\theta(y)$ diesen Faktor. Somit ist g ein Teiler von $\theta(z)$. Ergo $\mathcal{I}, \theta \models \text{ggT}(x, y, z)$.