

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 6

Abgabe bis Freitag, **19. Juni 2009**, 12h ct. vor der Übung
 Besprechung am **19. Juni 2009**

Aufgabe 21. Gegeben sei eine leere Signatur τ . Wir sagen, dass eine Formel φ bzw. eine Formelmengende Γ eine *Eigenschaft des Universum* ausdrückt, wenn für jede Menge U gilt: Die Eigenschaft trifft auf U zu gdw. es ein Modell von φ bzw. Γ gibt, dessen Universum U ist.

- (a) Geben Sie eine Formel $\varphi_{\leq 4}$ an, die ausdrückt, dass das Universum höchstens vier Elemente hat. Es soll also für alle Mengen U gelten: $|U| \leq 4$ gdw. $\varphi_{\leq 4}$ erfüllbar ist durch eine Modell mit Universum U .
- (b) Geben Sie eine Formel $\varphi_{\geq 3}$ an, die besagt, dass das Universum mindesten drei Elemente hat.
- (c) Geben Sie eine Formelmengende Γ_{∞} an, die ausdrückt, dass das Universum unendlich ist.
- (d) Wir erweitern – nur für diese Teilaufgabe – die Signatur mit einem einstelligen Funktionszeichen f . Geben Sie eine Formel φ_{∞}^f an, die ausdrückt, dass das Universum unendlich ist.
Hinweis: Ist X eine endliche Menge und $g : X \rightarrow X$ eine injektive Funktion, so ist g auch surjektiv. (Wieso eigentlich?)
- (e) Zeigen Sie, es gibt keine Formelmengende $\Gamma_{<\infty}$, die ausdrückt, dass das Universum endlich ist.
Hinweis: Sie dürfen hier verwenden, dass es auch einen Kompaktheitssatz für die erststufige Logik gibt, analog zu dem der Aussagenlogik: Für jede (erststufige) Formelmengende Γ gilt folgendes. Γ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge erfüllbar ist.

Wir erweitern die Signatur um eine zweistellige Relation R , die wir sowohl auf syntaktischer als auch semantischer Seite infix notieren. Weiter sei

$$Ord := \{ \forall x.\forall y.\forall z. xRy \wedge yRz \rightarrow xRz, \quad \forall x.\forall y. \neg(xRy \wedge yRx) \}$$

und $\mathcal{O}$ eine Modell von Ord mit einem Universum O .

- (f) Zeigen Sie, dass es in $\mathcal{O}$ keine Zyklen bezüglich $R^{\mathcal{O}}$ gibt, also, dass

$$o_0 R^{\mathcal{O}} \dots R^{\mathcal{O}} o_n R^{\mathcal{O}} o_0$$

für kein $1 \leq n \in \mathbb{N}$ und keine $o_0, \dots, o_n \in O$ möglich ist.

- (g) Geben Sie eine Formeln φ_{∞}^{Ord} an, so dass jedes Modell von $Ord \cup \{\varphi_{\infty}^{Ord}\}$ ein unendliches Universum hat.

Aufgabe 22. Sei τ eine Signatur, die nur ein zweistelliges Relationszeichen P , eine zweistellige Funktion f und die Konstanten c und d enthält. Sei

$$\Gamma := \{ \forall x.P(x, x), \quad \forall x.\forall y.P(x, y) \vee P(y, x), \quad \neg(P(c, d) \wedge P(d, c)), \\ \forall x.\forall y.\forall u.\forall w.P(x, u) \wedge P(y, w) \rightarrow P(f(x, y), f(u, w)) \}$$

eine Formelmengende über τ .

- (a) Geben Sie ein Modell von Γ über dem Universum $\mathbb{N}$ an.
- (b) Geben Sie ein Herbrand-Modell von Γ an.

Die restliche Aufgabe ist auf das siebte Übungsblatt verschoben!

Sei $\Delta := \{ \forall x. \forall y. P(x, y), \exists x. \exists y. \neg P(x, f(x, y)) \}$ eine Formelmengende über τ .

- (c) Zeigen Sie, dass Δ unerfüllbar ist.
- (d) Ist $AL(\Delta)$ als aussagenlogische Formelmengende erfüllbar oder nicht?

Aufgabe 23. Sei τ eine Signatur mit genau einer zweistelligen, infix notierten Funktion $_ \circ _$, und zwei Konstanten c und d . Die Sequenz S

$$\forall x. \forall y. \forall z. x \circ (y \circ z) \doteq (x \circ y) \circ z \implies c \circ d \doteq d \circ c$$

ist ungültig. Ein Beweisversuch führt zu einem maximalen Pfad Π von Sequenzen, der nicht mit einem Axiom endet.

- (a) Welche Form hat jede Sequenz eines solchen Pfades?

Sei $\mathcal{A}^\Pi$ nun das Termmodell zu Π , wie in der Vorlesung angegeben.

- (b) Welche Terme identifiziert die Kongruenzrelation $\sim$ von $\mathcal{A}^\Pi$ miteinander? Jeder Term kann als Baum aufgefasst werden. Wie stehen die Blätterfronten identifizierter Terme zueinander?
- (c) Welche Datenstruktur modelliert das Termmodell? Zeigen Sie mit Hilfe des Termmodells, dass die Datenstruktur assoziativ aber nicht kommutativ ist!

Aufgabe 24. Eine Formelmengende Ψ heiße *Skolem-Form einer Formelmengende* Φ genau dann, wenn Ψ für jede Formel φ von Φ eine Skolem-Form von φ enthält.

- (a) Finden Sie eine erfüllbare Formelmengende Φ und eine unerfüllbare Skolem-Form von Φ .
Hinweis: Obige Definition lässt offen, ob die Formeln z.B. simultan (jeweils für sich) oder (zusammen) sequentiell skolemisiert wurden.
- (b) Sei nun Φ eine Formelmengende. Zeigen Sie, dass eine Skolem-Form Ψ zu Φ existiert, so dass Φ erfüllbar ist genau dann, wenn Ψ erfüllbar ist.

Lösungsvorschlag. (a) $\Phi = \{ \forall x. \exists y. P(x, y), \forall x. \exists y. \neg P(x, y) \}$ (erfüllbar durch eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $P^{\mathcal{I}} = \leq$ über den ganzen Zahlen), und $\Psi = \{ \forall x. P(x, f(x)), \forall x. \neg P(x, f(x)) \}$.

- (b) Wir beschränken uns auf Formeln in Pränex-Normalform, da eine entsprechende Umwandlung keine Probleme bereitet. Informell liegt das Problem mit Teilaufgabe (a) in der gleichen Wahl von f für zwei verschiedene Formeln. In anderen Worten: Das Funktionszeichen f dient in beiden Formeln verschiedenen, hier sogar widersprüchlichen Zwecken. Es reicht also für jede Formel einen eigenen Zeichenvorrat zu haben.

Von einer Skolemisierung erwarten wir folgendes: Sei ψ eine Skolem-Form einer τ -Formel φ . So gilt:

- (α) Für alle Interpretationen $\mathcal{A}$ gilt: wenn $\mathcal{A} \models \psi$, dann $\mathcal{A} \upharpoonright \tau \models \varphi$. Damit bezeichne $\mathcal{A} \upharpoonright \tau$ das τ -Redukt von $\mathcal{A}$.
- (β) Für alle Interpretationen $\mathcal{B}$ gilt: wenn $\mathcal{B} \models \varphi$, dann gibt es eine Interpretation $\mathcal{A}$ (geeignet für ψ) mit $\mathcal{A} \upharpoonright \tau = \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \models \psi$.

Sei τ die Signatur zu Φ . Für alle $\varphi \in \Phi$ sei Σ_φ eine Menge von Funktionsymbolen, für jede Stelligkeit jeweils unendlich viele — dies schließt auch Konstantensymbole ein —, so dass Σ_φ und $\Sigma_{\varphi'}$ disjunkt sind für $\varphi \neq \varphi'$.¹

¹Eigentlich reicht für Σ_φ auch eine endliche Menge. Wie viele Funktionszeichen welcher Stelligkeit wirklich gebraucht werden, kann man aus φ direkt ablesen.

Wähle nun $\Psi := \{\psi_\varphi := \text{sko}_{\Sigma_\varphi}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}$. Dabei bezeichne $\text{sko}_{\Sigma}(\varphi)$ die Skolemisierung von φ , wobei die (für φ) neuen Funktionszeichen nur aus Σ stammen. Offenbar haben ψ_φ und $\psi_{\varphi'}$ für $\varphi \neq \varphi'$ nur Funktionssymbole höchstens aus τ gemeinsam. Es bleibt zu zeigen, dass die Eigenschaften (α) und (β) analog für Ψ und Φ gelten.

ad (α) . Gelte $\mathcal{A} \models \Psi$. Also auch $\mathcal{A} \models \psi$ für alle $\psi \in \Psi$. Da alle Elemente von Ψ Skolem-Formen sind, $\mathcal{A} \upharpoonright \tau \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$. Ergo, $\mathcal{A} \upharpoonright \tau \models \Phi$.

ad (β) . Gelte $\mathcal{B} \models \Phi$. Also auch $\mathcal{B} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$. Jedes $\varphi \in \Phi$ hat eine Erweiterung $\mathcal{B}_\varphi$ von $\mathcal{B}$, id est $\mathcal{B}_\varphi \upharpoonright \tau = \mathcal{B}$, mit $\mathcal{B}_\varphi \models \psi_\varphi \equiv \text{sko}_{\Sigma_\varphi}(\varphi)$. Wähle als Struktur $\mathcal{A}$ die Vereinigung aller $\mathcal{B}_\varphi$ für $\varphi \in \Phi$. Dies ist möglich, da sich die jeweiligen Erweiterungen bis auf τ nicht überlappen. Nota bene: An dieser Stelle scheitert Teilaufgabe (a).

Aufgabe 25. Sei φ eine Formel zu einer Signatur τ und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \theta)$ eine Interpretation über τ mit Universum A . Weiter sei $\hat{a} \notin A$.

- (a) Zeigen Sie, dass es eine Interpretation $\mathcal{I}'$ über τ gibt mit dem Universum $A' := A \dot{\cup} \{\hat{a}\}$ und der Eigenschaft:

$$\mathcal{I} \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{I}' \models \varphi \quad (\star)$$

für alle Formeln φ ohne der eingebauten Gleichheit $\doteq$.

Hinweise:

- (α) Das neue Element $\hat{a}$ soll in $\mathcal{I}'$ als eine Art “Zwilling” zu einem fest gewählten Element in A behandelt werden, d.h. in $\mathcal{I}'$ soll sich das Zwillingpaar ununterscheidbar verhalten. Definieren Sie sich eine geeignete Funktion $\pi : A' \rightarrow A$ und verfeinern Sie damit die Behauptung $(\star)$.

- (β) Sie werden wohl eine Aussage ähnliche zu $(\star)$ für Terme benötigen.

- (b) Angenommen, $\varphi(x, y)$ sei eine Formel, welche die eingebaute Gleichheit $\doteq$ nicht verwendet, aber die Gleichheit zwischen x und y definiert. Führen Sie diese Annahme zu einem Widerspruch.

Hinweis: Was besagt die Formel $\forall x. \forall y. \varphi(x, y)$?

Lösungsvorschlag. (b) Sei $\psi := \forall x. \forall y. P(x, y)$. Nach Annahme gilt für alle τ -Strukturen $\mathcal{A}$ mit Universum A :

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \text{gdw.} \quad |A| = 1. \quad (\dagger)$$

Sei also τ -Strukturen $\mathcal{A}$ mit einem einelementigen Universum A . Insbesondere ist $\mathcal{A}$ damit ein Modell von ψ . Nach (a) gibt ein Modell $\mathcal{A}'$ mit einem Universum A' der Größe 2, so dass $\mathcal{A}' \models \psi$. Nach $(\dagger)$ hat A' dann aber die Größe 1. Widerspruch.