

Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 7

Abgabe bis Freitag, 26. Juni 2009, 12h ct. vor der Übung
 Besprechung am 26. Juni 2009

Aufgabe 22 – Fortsetzung. Sei τ eine Signatur, die nur eine zweistellige Relation P und eine zweistellige Funktion f enthält. Sei Δ die Formelmenge $\{ \forall x. \forall y. P(x, y), \exists x. \exists y. \neg P(x, f(x, y)) \}$ über τ .

- (c) Bestimmen Sie eine Skolemform Δ^{sko} von Δ .
- (d) Zeigen Sie, dass Δ^{sko} unerfüllbar ist.
- (e) Ist jeder Abschluss von $AL(\Delta^{sko})$ (als aussagenlogische Formelmenge) erfüllbar oder nicht?

Man könnte versuchen, den Satz von Herbrand auf Allgemeingültigkeit wie folgt zu erweitern: Für jede Formelmenge Φ von $\text{FO}^\forall$ -Sätzen ist Φ allgemeingültig gdw. jeder Abschluss von $AL(\Phi)$ erfüllbar ist.

- (f) Zeigen Sie, dass diese Erweiterung falsch ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\Phi := \{ \forall x. P(x, x) \}$.

Aufgabe 26. Sei τ eine endliche Signatur und $\mathcal{A}$ eine endliche Struktur über τ .

- (a) Konstruieren Sie eine τ -Satz $\varphi_{\mathcal{A}}$, der $\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie beschreibt, d.h. für alle τ -Strukturen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}} \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{B} \simeq \mathcal{A}.$$

Hinweis: Aufgabe 21(a) und (b) für die Größenbeschreibung des Universums von $\mathcal{A}$.

- (b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ aus $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ folgt.

Lösungsvorschlag. (a) Das Universum von $\mathcal{A}$ sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit $n = |A|$. Weiter bezeichne x_a für jedes $a \in A$ eine eindeutige Variable.

$$\varphi_{\mathcal{A}} := \exists x_{a_1} \dots \exists x_{a_n} . \bigwedge_{a, b \in A, a \neq b} \neg x_a \doteq x_b \quad \wedge \tag{1}$$

$$\left(\forall y. \bigvee_{a \in A} y \doteq x_a \right) \quad \wedge \tag{2}$$

$$\bigwedge_{R \text{ Relation in } \tau} \chi_R(x_{a_1}, \dots, x_{a_n}) \quad \wedge \tag{3}$$

$$\bigwedge_{f \text{ Funktion in } \tau} \chi_f(x_{a_1}, \dots, x_{a_n}) \tag{4}$$

wobei für jedes k -stellige Relationszeichen R

$$\chi_R(x_{a_1}, \dots, x_{a_n}) := \bigwedge_{v_1 \in A} \dots \bigwedge_{v_k \in A} \begin{cases} R(x_{v_1}, \dots, x_{v_k}) & \text{wenn } (v_1, \dots, v_k) \in R^{\mathcal{A}} \\ \neg R(x_{v_1}, \dots, x_{v_k}) & \text{wenn } (v_1, \dots, v_k) \notin R^{\mathcal{A}} \end{cases}$$

und für jedes k -stellige Funktionszeichen f

$$\chi_f(x_{a_1}, \dots, x_{a_n}) := \bigwedge_{v_1 \in A} \dots \bigwedge_{v_k \in A} f(x_{v_1}, \dots, x_{v_k}) = x_{f^{\mathcal{A}}(v_1, \dots, v_k)}$$

gesetzt wird. (Eine informelle Begründung wurde in der Übungsstunde besprochen.) Mit $\psi_{\mathcal{A}}$ bezeichnen wir die Teilformeln (1) bis (4).

Es bleibt zu zeigen, dass diese Setzungen von $\varphi_{\mathcal{A}}$ die Struktur $\mathcal{A}$ wirklich bis auf Isomorphie charakterisiert.

Richtung $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}}$: Gelte $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ und sei ι ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Zu zeigen ist $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}}$. Wähle als Belegung $\eta = [x_{a_1} \mapsto \iota(a_1), \dots, x_{a_n} \mapsto \iota(a_n)]$. So gilt $\mathcal{B}, \eta \models \psi_{\mathcal{A}}$ (und damit auch $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}}$), denn (1) gilt, da ι injektiv ist, (2) gilt, weil ι surjektiv ist, und (3) und (4), da ι ein Isomorphismus ist:

Sei R eine k -stellige Relation. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{B}, \eta \models \chi_R(x_{a_1}, \dots, x_{a_n})$ gilt. Sei $v_1, \dots, v_k \in A$ gegeben. Falls $(v_1, \dots, v_k) \in R^{\mathcal{A}}$, so tritt $R(x_{v_1}, \dots, x_{v_k})$ positiv in χ_R auf. Da ι ein Isomorphismus ist, gilt außerdem: $(\iota(v_1), \dots, \iota(v_k)) \in R^{\mathcal{B}}$. Damit gilt aber auch $\mathcal{B}, \eta \models R(x_{v_1}, \dots, x_{v_k})$. Der Fall $(v_1, \dots, v_k) \notin R^{\mathcal{A}}$ ist vollkommen analog.

Sei f eine k -stellige Funktion. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{B}, \eta \models \chi_f(x_{a_1}, \dots, x_{a_n})$ gilt. Sei $v_1, \dots, v_k \in A$ gegeben. Die linke Seite der Gleichung in χ_f wertet zu

$$f^{\mathcal{B}}(\iota(v_1), \dots, \iota(v_k))$$

aus. Da ι ein Isomorphismus ist dies $\iota(f^{\mathcal{A}}(v_1, \dots, v_k))$, was gerade der Wert von

$$x_{f^{\mathcal{A}}(v_1, \dots, v_k)}$$

ist.

Richtung $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$: Gelte $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}}$. Zu zeigen ist $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. Da $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}}$, gibt es eine Belegung η mit $\mathcal{B}, \eta \models \psi_{\mathcal{A}}$. Es reicht nun einen Isomorphismus ι von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ zu konstruieren. Wähle $\iota(a) = \eta(x_a)$ für alle $a \in A$. So ist ι injektiv nach (1) und surjektiv nach (2). Überdies ist ι in der Tat auch ein Isomorphismus wegen (3) und (4) – analog zur Argumentation für die andere Richtung.

Hinweis: In die Konstruktion von $\varphi_{\mathcal{A}}$ geht essentiell die Endlichkeit von τ und $\mathcal{A}$ ein.

Aufgabe 27. Sei φ eine FO-Formel in Skolem-Normalform.

- Begründen Sie kurz, warum $AL(\{\varphi\})$ aufzählbar ist, d.h. warum es einen Algorithmus gibt, welcher der Reihe nach die Elemente von $AL(\{\varphi\})$ ausgibt, dabei muss der Algorithmus nicht terminieren.
- Zeigen Sie: φ ist unerfüllbar gdw. alle Abschlüsse von $AL(\{\varphi\})$ unerfüllbar sind.
- Sei Θ ein Abschluss von $\Psi := AL(\{\varphi\})$ und sei $\Psi' \subseteq \Psi$. Zeigen Sie, dass es eine Menge $\Theta' \subseteq \Theta$ gibt, die Abschluss von Ψ' ist.
- Begründen Sie, warum es nur endliche viele Abschlüsse einer endlichen Formelmengen Ψ gibt, und warum diese aufzählbar sind.
- Geben Sie einen Algorithmus G an, der für eine FO-Formel φ folgendes leistet. Wenn G unerfüllbar zurückgibt, ist φ unerfüllbar. Der Algorithmus muss nicht terminieren.

Lösungsvorschlag. (a) $AL(\{\varphi\})$ ist aufzählbar, da die Menge der Grundterme bereits aufzählbar ist.

- Kontraposition des Satzes von Herbrand.

- (c) Offenbar reicht $\Theta' = \Theta$ zu setzen, denn, falls Θ ein Abschluss von Ψ ist, dann auch von jeder Teilmenge von Ψ . Für die Teilaufgabe (e) zeigen wir eine stärkere Aussage:

Wenn Θ ein Abschluss von Ψ ist und $\Psi' \subseteq \Psi$,
dann gibt es einen (bzgl. Mengeneinklusion) *kleinsten* Abschluss $\Theta' \subseteq \Theta$ von Ψ' . (5)

Beweis. Dem einleitenden Text folgend ist aber Θ auch ein Abschluss von Ψ' . Also gibt es auch einen bzgl. $\subseteq$ kleinsten Abschluss von Ψ' . $\square$

Die Aussage (5) lässt sich auch eleganter als kommutatives Diagramm veranschaulichen.

$$\begin{array}{ccc}
 \Theta & \xrightarrow{\text{Abschluss von}} & \Psi = AL(\{\varphi\}) \\
 \cup \downarrow & & \cup \downarrow \\
 \Theta' & \xrightarrow{\text{kleinster Abschluss von}} & \Psi'
 \end{array}$$

- (d) Nachdem es zu jeder Formelmenge einen Abschluss gibt und jeder Abschluss eine Obermenge ist, gibt es natürlich unendlich viele Abschlüsse zu einer Formelmenge. Vielmehr zeigen wir folgendes:

jede endliche Formelmenge Γ hat nur endlich viele (bzgl. $\subseteq$) *kleinste* Abschlüsse und
es gibt ein Verfahren, das endlich viele Abschlüsse von Γ produziert,
so dass sich unter diesen auch alle kleinsten Abschlüsse von Γ befinden. (6)

Beweis. In einen Abschluss einer Menge gehen zwei Aspekte ein: zum einen ein rein algorithmischer Teil (Reflexivität für Grundterme, Abschluss unter Gleichheit, ...) und zum anderen eine Entscheidung für jede Disjunktion, welche Teilformel in den Abschluss aufgenommen wird. Im Fall eines kleinsten Abschlusses gibt es für den letzten Aspekt nur endlich viele Möglichkeiten, genauer: höchstens zwei hoch die Anzahl der Disjunktionen in der Formelmenge (ggf. auch als Subformel). Wurde nun eine Entscheidung bzgl. der Disjunktionen getroffen, kann der algorithmische Teil der Formelgröße nach sukzessiv ausgeführt werden. Dabei ist beim Abschluss unter Gleichheit anzumerken, dass eine Formel nur endlich viele Subterme besitzt, auch wenn die eigentliche Definition alle möglichen Tripel aus Formel, Variable und Term betrachten müsste. $\square$

Bemerkungen. (i) Das skizzierte Verfahren liefert auch nicht-kleinste Abschlüsse. Denn der Abschluss unter Gleichheit kann ein Disjunkt liefern gegen das man sich vorher entschieden hat. Zum Beispiel könnte man sich bei der Menge

$$\{ \varphi[t/x] \vee \psi, \varphi[t'/x], t \doteq t' \}$$

für das Disjunkt ψ entscheiden während der Abschluss unter Gleichheit $\varphi[t/x]$ liefert. Der resultierende Abschluss ist sicher nicht der kleinste.

(ii) Die so konstruierten Abschlüsse sind zwar nicht endlich, aber aufzählbar, da die Reflexivität der Grundterme in die Abschlüsse eingeht.

- (e) Informell reicht es nach (b) nachzuweisen, dass alle Abschlüsse von $AL(\{\varphi\})$ unerfüllbar sind. Dazu reicht es nach (5) sich auf die kleinsten Abschlüsse zu konzentrieren, die nach (6) auch einen guten algorithmischen Charakter haben. Ein Problem ist noch, dass solche Abschlüsse immer noch unendlich sein können. Um diese dennoch irgendwie auf Unerfüllbarkeit zu testen, soll eine aufsteigende Folge von endlichen Teilmengen herangezogen werden. Im Algorithmus steht die Variable ψ' für die Konjunktion der Formeln einer solchen Teilmenge. Da die Aufzählung jedoch i.A. unendlich ist, setzen wir den Unerfüllbarkeitstest als eine eigene Prozessfamilie ab und fahren mit einem anderen kleinsten Abschluss fort.

Mit φ als Eingabe kann der geforderte Algorithmus G^1 folgendermaßen aussehen.

¹Der Name soll die Anlehnung an den Algorithmus von Gilmore ausdrücken.

```

01 Variable  $\Psi' := \emptyset$ ;
02 Für alle  $\psi$  einer Aufzählung von  $AL(\{\varphi\})$  tue
03    $\Psi' := \Psi' \cup \{\psi\}$ ; //  $\Psi' \subseteq AL(\{\varphi\})$ 
04   Seien  $\Theta'[1], \dots, \Theta'[k]$  eine Menge von Abschlüsse von  $\Psi'$ ,
        darunter auch alle kleinsten Abschlüsse von  $\Psi'$ ;
05   Für alle  $i=1, \dots, k$  tue
06     Erzeuge folgende Prozess  $p[i]$ 
07       Variable  $\psi' := \top$ ;
08       für alle Formeln  $\theta'$  in (einer Aufzählung von)  $\Theta'[i]$  tue
09          $\psi' := \psi' \wedge \theta'$ ;
10         wenn  $\psi'$  unerfüllbar (z.B. mittels Wertetabelle) dann
11           terminiere diesen Kindprozess mit "unerfüllbar";
12         terminiere diesen Kindprozess mit "erfüllbar";
13   starte folgenden Kindprozess
14     Beobachte alle Kindprozesse  $p[1], \dots, p[k]$ ;
15     Wenn jeder irgendwann mit "unerfüllbar" terminiert hat, dann
16       beendet das gesamte Verfahren mit "unerfüllbar";
17   starte die Kindprozesse  $p[1], \dots, p[k]$ ;

```

Zur Wohldefiniertheit: $AL(\{\varphi\})$ ist nach Teilaufgabe (a) aufzählbar. Damit ist Zeile 02 wohldefiniert. In dem Schleifendurchlauf ist Ψ' endlich. Daher gibt es nach (6) auch nur endlich viele kleinste Abschlüsse von Ψ' . Überdies sind diese auch aufzählbar. Damit ist auch Zeile 04 wohldefiniert. $\square$

Zur Korrektheit: Angenommen der obige Algorithmus liefere für φ "unerfüllbar". Es ist zu zeigen, dass φ tatsächlich unerfüllbar ist. Nach (b) reicht es zu zeigen, dass alle Abschlüsse von $AL(\{\varphi\})$ unerfüllbar sind. Sei Θ dazu ein Abschluss von $AL(\{\varphi\})$. Es ist zu zeigen, dass Θ unerfüllbar ist. Da der Algorithmus terminiert, gibt es eine endliche Menge $\Psi' \subseteq AL(\{\varphi\})$, so dass für alle ihrer Abschlüsse, $\Theta[1]$ bis $\Theta[k]$, die entsprechenden Kindprozesse, $p[1]$ bis $p[k]$, mit "unerfüllbar" terminieren. Das heißt aber, dass für alle $i = 1, \dots, k$ die Menge eine unerfüllbare Teilmenge besitzt. Also ist $\Theta[i]$ selbst unerfüllbar. Es bleibt immernoch zu zeigen, dass Θ unerfüllbar ist. Nach (5) gibt es einen kleinsten Abschluss $\Theta' \subseteq \Theta$ von Ψ' . Da $\Theta[1]$ bis $\Theta[k]$ nun alle kleinsten Abschlüsse von Ψ' enthalten, gibt es ein $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $\Theta[i] = \Theta'$. Da aber $\Theta[i]$ unerfüllbar ist, trifft dies auch auf Θ zu. $\square$

Bemerkung: Natürlich würde auch ein nicht terminierender Algorithmus ausreichen. Jedoch sollte in dieser Aufgabe der Algorithmus den Satz von Herbrand umsetzen.

Aufgabe 28. Sei τ eine Signatur, die nur ein zweistelliges Relationssymbol R enthält, und weiter sei $\varphi := \forall x. \neg R(x, x)$.

- Begründen Sie kurz, warum es unendlich viele nicht isomorphe Modelle von φ gibt!
- Wie viele nicht isomorphe Modelle hat φ , deren Universum die Größe 3 hat? Geben Sie die entsprechenden Äquivalenzklassen (bzgl. der Isomorphie) an!