

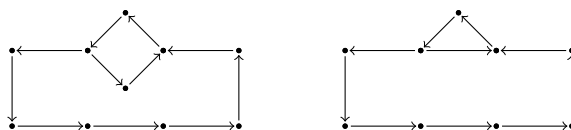
Übung zur Vorlesung
Logik für Informatiker
Übungsblatt 8

Abgabe bis Freitag, 3. Juli 2009, 12h ct. vor der Übung
 Besprechung am 3. Juli 2009

Aufgabe 29. Sei τ die leere Signatur.

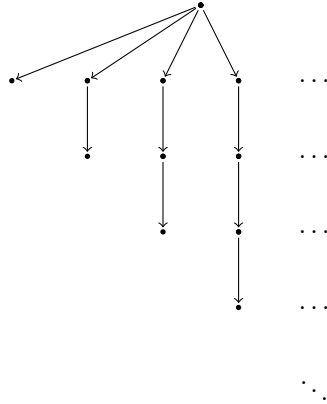
- (a) Sei $\mathcal{N}$ die τ -Struktur $(\mathbb{N})$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{A}_n$ die τ -Struktur $(\{0, \dots, n-1\})$. Begründen Sie kurz, warum der Duplikator das Spiel $\mathcal{G}_n^{\mathcal{N}, \mathcal{A}_n}$ gewinnt.
- (b) Enthalte τ nun die Relation $<$ mit der üblichen Interpretation. Gilt die Aussage aus (a) immer noch? Wenn ja, begründen Sie dies, wenn nicht, dann geben Sie jeweils ein k an, so dass der Duplikator das Spiel $\mathcal{G}_i^{\mathcal{N}, \mathcal{A}_n}$ für alle $i \leq k$, aber der Spoiler das Spiel $\mathcal{G}_{k+1}^{\mathcal{N}, \mathcal{A}_n}$ gewinnt.

Aufgabe 30. Gegeben sind folgende Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ über einer Signatur mit einem zweistelligen Relationsymbol E . Ein gerichtete Kanten von a nach b symbolisiert, dass (a, b) in der entsprechenden Relation liegt.



- (a) Zeigen Sie, dass die beiden Strukturen nicht isomorph sind.
- (b) Geben Sie einen maximalen partiellen Isomorphismus zwischen den Strukturen an.
- (c) Geben Sie eine Partie mit 3 Runden an, die Spieler **D** gewinnt.
- (d) Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler **S** für $\mathcal{G}_3^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ an.

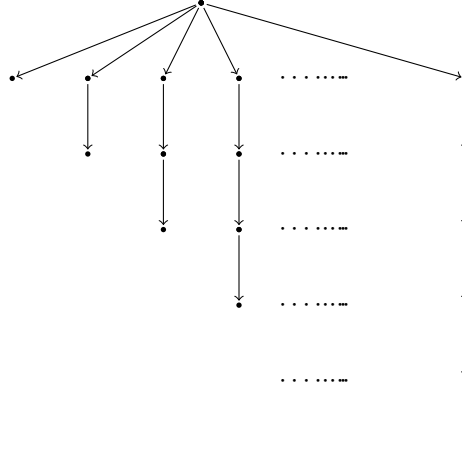
Aufgabe 31. Sei τ eine Struktur, die ein zweistelliges Relationszeichen enthält, und sei $\mathcal{A}$ folgende unendliche τ -Struktur.



Jede der “Tentakeln” in $\mathcal{A}$ ist endlich und für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es genau eine Tentakel der Länge k . Eine gerichtete Kanten von a nach b symbolisiert, dass (a, b) in der entsprechenden Relation liegt. Finden Sie eine (abzählbare) unendliche Struktur $\mathcal{B}$, so dass

- (a) einerseits $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$, und
- (b) andererseits der Spieler **D** das Spiel $\mathcal{G}_k^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ für jedes k gewinnt.

Lösungsvorschlag. Eine Beobachtung vorweg: Ein Löschen oder Hinzufügen von endlichen “Strukturen” von bzw. an $\mathcal{A}$ bringt im Allgemeinen nichts, da sie vom Spoiler in einer entsprechenden Anzahl von Zügen entdeckt werden kann (i.e. der Duplikator kann nicht mehr ziehen ohne dadurch gleich die Partie zu verlieren). Informell heißt dies, dass $\mathcal{A}$ um eine unendliche “Struktur” erweitert werden muss. Daher fügen wir eine unendlich lange “Tentakel” an der Wurzel hinzu und nennen diese Struktur $\mathcal{B}$.



Die Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind offenbar nicht isomorph. Denn $\mathcal{B}$ enthält einen unendlichen (gerichteten) Pfad, dessen Kanten alle in die gleiche Richtung zeigen; einen solchen Pfad enthält $\mathcal{A}$ jedoch nicht.

Es bleibt zu zeigen, dass der Duplikator die Spiele $\mathcal{G}_k^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ (mit $k \in \mathbb{N}$) gewinnen kann. D.h. es reicht, eine entsprechende Gewinnstrategie zu bestimmen. Vorweg einige Konventionen. Da $\mathcal{A}$ eine Substruktur von $\mathcal{B}$ ist, identifizieren wir die Wurzel w und die jeweiligen Blätter in beiden Strukturen miteinander. Zur späteren Vereinfachung bezeichnen wir mit $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots$ die Blätter in der Struktur $\mathcal{A}$. Außerdem bezeichne $b_0, b_{-1}, b_{-2}, \dots$ die selben Blätter in $\mathcal{B}$. Für zwei Knoten u und v auf $\mathcal{A}$, schreiben wir $T^{\mathcal{A}}(u, v)$, falls sie auf der gleichen "Tentakel" liegen. Die Wurzel liege auf keine Tentakel. Analog ist $T^{\mathcal{B}}$ gemeint. Die Kantenrelation heiße E , d.h. $uE^{\mathcal{A}}v$ gilt gdw. es eine Kanten von u nach v in der Struktur $\mathcal{A}$ gilt. Den Abstand zweier Knoten u und v (beide in $\mathcal{A}$ oder beide in $\mathcal{B}$) sei mit $\delta^{\mathcal{A}}(u, v)$ bzw. $\delta^{\mathcal{B}}(u, v)$ bezeichnet.

Ein wichtige Beobachtung für (nachzu) linear geordnete Strukturen ist folgende: Ist der Abstand zwischen zwei gespielten Paaren unterschiedlich, wobei der kleinere Abstand ℓ sei, so kann der Spoiler diese Diskrepanz in ca. $\log_2(\ell)$ Runden durch eine binäre Suche detektieren, d.h. der Duplikator hätte diese Partie verloren. Oder andersherum: sind noch s Runden zu spielen, muss der Duplikator sicherstellen, dass bei je zwei gespielten Paaren mit unterschiedlichem Abstand, der kleinere Abstand größer als ca. 2^s ist, um nicht bereits auf Grund des Unterschieds in den Längen zu verlieren.

Im konkreten Fall besteht die Aufgabe des Duplikators darin, die unendlich vielen Äste in $\mathcal{A}$ mit denen in $\mathcal{B}$ zu identifizieren. Diese Identifikation ist aufgrund der unterschiedlichen Längen so nicht möglich. Der Duplikator kann aber versuchen, den Spoiler in den verbleibenden Runden die Illusion zu geben, dass eine solche Identifikation existiert. Der Spoiler kann diese Täuschung im Wesentlichen nur merken, wenn die Abständen von gespielten Paaren zur den jeweiligen Blättern oder einem anderen Paar nicht stimmt.

Invariante.

Nach der r -ten Runde (wobei $0 \leq r \leq k$) seien $a_1, \dots, a_r$ in $\mathcal{A}$ und $b_1, \dots, b_r$ in $\mathcal{B}$ gespielt worden. Als Invariante gelte jeweils:

$$\delta^{\mathcal{A}}(w, a_i) = \delta^{\mathcal{B}}(w, b_i). \quad (\text{Inv}_1)$$

$$\text{Wenn } T^{\mathcal{A}}(a_i, a_j) \text{ und } \delta^{\mathcal{A}}(a_i, a_j) < 2^{k-r+1}, \text{ dann } T^{\mathcal{B}}(b_i, b_j). \quad (\text{Inv}_2)$$

$$\text{Wenn } T^{\mathcal{B}}(b_i, b_j) \text{ und } \delta^{\mathcal{B}}(b_i, b_j) < 2^{k-r+1}, \text{ dann } T^{\mathcal{A}}(a_i, a_j). \quad (\text{Inv}_3)$$

für alle $i, j \in \{\dots, 0, 1, \dots, r\}$.

Dabei ist zu beachten, dass nach obiger Konvention Knoten mit nicht-positiven Index den Blättern entsprechen. Man könnte auch sagen, vor dem eigentlichen Spiel hat der Spoiler jedes Blatt in einer Struktur einmal angespielt und der Duplikator mit dem entsprechenden Blatt der anderen Struktur geantwortet.

Die Invariant muss außerdem zeigen, dass die bis zur letzten Runde gespielten Paare einen partiellen Isomorphismus bilden. Diese Bedingung verwandelt das “ca. 2^s ” in der informellen Beschreibung in die konkrete Schranke “ 2^{k-r+1} ”; mehr dazu siehe weiter unten. Genauer genommen, kann auch 2^{k-r+c} als Schranke für ein beliebige $c > 0$ fungieren. Daher ist eine Strategie des Duplikator für $\mathcal{G}_k^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ auch eine Strategie für $\mathcal{G}_{k'}^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ mit $k' < k$; diese Beobachtung sollte aber nicht weiter verwundern.

Behauptung 1. Gilt die Invariante nach der letzten Runde, nämlich $r = k$, so bildet die Abbildung κ mit $a_i \mapsto b_i$ für alle $i \in \{0, \dots, r\}$ einen partiellen Isomorphismus.

Beweis. Es sind drei Eigenschaften nachzuweisen.

Wohldefiniertheit. Für zwei Indizes $i, j \in \{0, \dots, r\}$ gelte $a_i = a_j$. Falls beide die Wurzel sind, so sind auch b_i und b_j die Wurzel wegen (Inv₁). Ansonsten liegen wegen (Inv₂) b_i und b_j auf der gleichen Tentakel. Mit (Inv₁) sind beide sogar identisch.

Injektivität. Genauso, nur mit Hilfe von (Inv₁) und (Inv₃).

Verträglichkeit mit Kantenrelation. Gelte $a_i E^{\mathcal{A}} a_j$ für $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Falls a_i die Wurzel ist, so muss wegen (Inv₁) für i auch b_i die Wurzel sein. Mit (Inv₁) für j ist der Abstand von b_j zur Wurzel eins. Also $b_i E^{\mathcal{B}} b_j$. Sei nun a_i keine Wurzel. Da die Kanten von der Wurzel wegzeigen, ist a_j auch keine Wurzel. Insbesondere liegen die beiden Knoten also auf der gleichen Tentaklen. Da beide Knoten verbunden sind, gilt insbesondere $\delta^{\mathcal{A}}(a_i, a_j) = 1 < 2^{k-k+1} = 2^{k-r+1}$. Dank (Inv₂) liegen b_i und b_j auf der gleichen Tentakel. Mit (Inv₁) gilt auch $b_i E^{\mathcal{B}} b_j$, da Knoten auf einer Tentaklen linear geordnet sind. Der Beweis für die andere Richtung, von $E^{\mathcal{B}}$ nach $E^{\mathcal{A}}$, kann genauso geführt werden, da die Invariante symmetrisch ist. $\square$

Behauptung 2. Es gibt eine Strategie für den Duplikator, welche die Invariante bewahrt.

Beweis durch Induktion über $r \in \{0, \dots, k\}$.

Induktionsbasis $r = 0$. Da nicht-positive Indizes die Blätter repräsentieren und nach Konvention für diese Indizes $a_i = b_i$ gilt, ist (Inv_1) trivialerweise erfüllt. Weiter liegen zwei verschiedene Blätter auch auf zwei verschiedenen Tentakeln. Daher sind auch (Inv_2) und (Inv_3) erfüllt.

Induktionsschritt von $r - 1$ auf r . Die Invariante gelte für $a_1, \dots, a_{r-1}$ in $\mathcal{A}$ und $b_1, \dots, b_{r-1}$ in $\mathcal{B}$. O.B.d.A. spiele der Spoiler auf der Struktur $\mathcal{B}$ den Knoten b_r . Die Argumentation für den Fall, dass der Spoiler in $\mathcal{A}$ spielt, verläuft völlig analog. Jedoch ist in der hier gezeigten Richtung der Fall der unendlich lange Tentakel in $\mathcal{B}$ interessant.

Da $2^{k-r+1} < 2^{k-(r-1)+1}$ reicht es dank der Induktionshypothese ein a_r in der Struktur $\mathcal{A}$ zu finden, so dass für alle $i \in \{\dots, 0, 1, \dots, r-1\}$ folgendes gilt:

$$\delta^{\mathcal{A}}(w, a_r) = \delta^{\mathcal{B}}(w, b_r). \quad (\text{Inv}'_1)$$

$$\text{Wenn } T^{\mathcal{A}}(a_i, a_r) \text{ und } \delta^{\mathcal{A}}(a_i, a_r) < 2^{k-r+1}, \text{ dann } T^{\mathcal{B}}(b_i, b_r). \quad (\text{Inv}'_2)$$

$$\text{Wenn } T^{\mathcal{B}}(b_i, b_r) \text{ und } \delta^{\mathcal{B}}(b_i, b_r) < 2^{k-r+1}, \text{ dann } T^{\mathcal{A}}(a_i, a_r). \quad (\text{Inv}'_3)$$

Wir unterscheiden folgende Fälle.

Fall: b_r ist die Wurzel. So wähle als a_r ebenfalls die Wurzel. So ist (Inv'_1) trivial erfüllt, weil $a_r = b_r = w$. Da die Wurzel auf keiner Tentakel liegt, sind (Inv'_2) und (Inv'_3) ebenfalls trivial erfüllt.

Fall: es gibt einen Knoten b_j mit $j \in \{\dots, 0, 1, \dots, r-1\}$ mit $T^{\mathcal{B}}(b_j, b_r)$ und $\delta^{\mathcal{B}}(b_j, b_r) < 2^{k-r+1}$. Wähle ein solches j . Als a_r wähle in der Struktur $\mathcal{A}$ den Knoten auf der gleichen Tentakel wie a_j im Abstand $\delta^{\mathcal{B}}(w, b_r)$. Dieser Knoten ist eindeutig bestimmt und erfüllt (Inv'_1) .

Zum Nachweis von (Inv'_3) sei $i \in \{\dots, 0, 1, \dots, r-1\}$, es lägen b_i und b_r auf der gleichen Tentakel und es gelte $\delta^{\mathcal{B}}(b_i, b_r) < 2^{k-r+1}$. Da $\delta^{\mathcal{B}}(b_j, b_r) < 2^{k-r+1}$ nach Wahl von b_j , ist $\delta^{\mathcal{B}}(b_i, b_j) < 2 \cdot 2^{k-r+1} = 2^{k-(r-1)+1}$ und zwar unabhängig von der relativen Lage von b_i , b_j und b_r zueinander, da alle drei auf der gleichen Tentakel liegen. Die Induktionshypothese besagt, dass (Inv_2) für das Indexpaar aus i und j gilt. Damit liegen b_i und b_j auf der gleichen Tentakel.

Der Nachweis von (Inv'_2) verläuft analog.

Fall sonst, d.h. es gibt keinen Knoten b_j für $j \in \{\dots, 0, 1, \dots, r-1\}$ im Abstand $< 2^{k-r+1}$ auf der gleichen Tentakel wie b_r . Damit ist (Inv'_3) trivialerweise erfüllt. Außerdem ist b_r in diesem Fall nicht die Wurzel. Sei nun $d > 0$ der Abstand von b_r zur Wurzel. Wähle eine Tentakel T in $\mathcal{A}$ aus, so dass

- kein a_i für $i \in \{1, \dots, r-1\}$ auf dieser Tentakel liegt, und
- der Abstand des einzigen Blattes auf T zur Wurzel mindestens $d + 2^{k-r+1}$ ist.

Eine solche Tentakle existiert, da die Wurzel unendlich viele Tentaklen unbeschränkter Länge hat. Platziere a_r auf T im Abstand d von der Wurzel. Offenbar gilt mit dieser Setzung (Inv'_1) . Da der Abstand des Blattes zu a_r mindestens 2^{k-r+1} ist, gilt auch (Inv'_2) . $\square$

Nota bene: für jedes k hat der Duplikator eine andere Strategie.

Aufgabe 32. Laut einem Satz der Vorlesung ist FO über rein relationalen Signaturen entscheidbar, während es keinen Algorithmus gibt, der für allgemeines FO die Erfüllbarkeit entscheidet. Andererseits kann man Funktionen aber auch durch Relationen ausdrücken und somit jede FO-Formel über beliebiger Signatur in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel über einer rein relationalen Signatur transformieren. Wieso liefert dies keinen Algorithmus, der Erfüllbarkeit für allgemeines FO entscheidet?