Ludwig-Maximilians-Universität München SoSe 2009
Institut für Informatik
PD Dr. Martin Lange
Dipl.-Inf. Markus Latte 29. Mai 2009

Probeklausur zur Vorlesung
Logik für Informatiker

Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	alle eigene Notizen und Ausdrucke zur Vorlesung oder Übung

Schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer der bearbeiteten Aufgaben auf jedes Blatt!

Aufgabe 1. Es ist bekannt, dass die Mengen $\{\cdot \wedge \cdot, \cdot \vee \cdot, \neg \cdot\}$, $\{\cdot \vee \cdot, \neg \cdot\}$ und $\{\cdot \wedge \cdot, \neg \cdot\}$ jeweils funktional vollständig sind. Welche der folgenden Mengen sind funktional vollständig? Im positiven Fall beweisen Sie die funktionale Vollständigkeit, und im negativen Fall geben Sie eine kurze Begründung an!

(a) $\{\cdot \S \cdot\}$, wobei die Funktion § folgende Wahrheitstafel hat. *(3 Punkte)*

x	y	$x \S y$
ff	ff	ff
ff	tt	tt
tt	ff	ff
tt	tt	ff

(b) $\{\cdot \bigtriangleup \cdot \bigtriangledown \cdot\}$, wobei die dreistellige Funktion $\bigtriangleup\bigtriangledown$ folgende Wahrheitstafel hat. *(3 Punkte)*

x	y	z	$x \bigtriangleup y \bigtriangledown z$
ff	ff	ff	ff
ff	ff	tt	ff
ff	tt	ff	ff
ff	tt	tt	tt
tt	ff	ff	tt
tt	ff	tt	tt
tt	tt	ff	tt
tt	tt	tt	tt

Aufgabe 2. Bestimmen Sie eine Formel in konjunktiver Normalform, die zu

$$((A \to B) \vee (C \wedge (C \to A \vee D \vee E))) \wedge E$$

erfüllbarkeitsäquivalent ist. *(3 Punkte)*

Aufgabe 3. Konstruieren Sie einen Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit der folgenden Klauselmenge.

$$\{A, B, C\}, \{\neg C, D\}, \{\neg B, E\}, \{\neg E, F\}, \{\neg F, D\}, \{\neg A, D\},$$
$$\{\neg D, H, G\}, \{\neg H, G\}, \{\neg H, \neg G, \neg D\}, \{H, \neg G\}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Vervollständigen Sie folgenden Beweis im Sequenzenkalkül.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\ldots \Longrightarrow \ldots} \qquad \dfrac{\vdots}{\ldots \Longrightarrow \ldots}}{A \vee B, B \to C, (A \to B) \wedge (C \to D) \Longrightarrow C \wedge D} \to_L$$

Hinweis: Die untere Sequenz ist gültig. *(6 Punkte)*

Aufgabe 5. Sei $\psi \to \varphi$ eine Tautologie und θ eine Formel, die nur aus Aussagenvariablen, Disjunktionen und Konjunktionen aufgebaut ist.

(a) Zeigen Sie durch Induktion über den Formelaufbau von θ, dass auch $\theta[\psi/A] \to \theta[\varphi/A]$ eine Tautologie ist. *(4 Punkte)*

(b) Angenommen, θ darf auch Negationen enthalten. Finden Sie eine Gegenbeispiel zur Vermutung, dass die Formel $\theta[\psi/A] \to \theta[\varphi/A]$ eine Tautologie ist und begründen Sie Ihre Antwort kurz! *(2 Punkte)*

Aufgabe 6. Gegeben sei eine einstellige Funktion `erfüllbar`, die für eine jede Formel φ "wahr" liefert, wenn φ erfüllbar ist, und "falsch" sonst. Weiter sei eine Funktion `vars` vorhanden, die für eine jede Formel ψ die Menge der Variablen in ψ zurück gibt.
Geben Sie einen Algorithmus `erfüllbarMitBelegung` an, der für eine beliebige Formel θ feststellt, ob diese erfüllbar ist oder nicht. Im positiven Fall soll zusätzlich einen erfüllende Belegung zurückgeliefert werden. Die Anzahl der Aufrufe von `erfüllbar` soll höchstens linear in der Größe von θ beschränkt sein.
Hinweis: Benutzen Sie die Tatsache, dass man aus der Erfüllbarkeit von $\varphi \wedge \ell$, wobei ℓ ein Literal ist, teilweise auf die Erfüllbarkeit von φ schließen kann. *(4 Punkte)*

Aufgabe 7. Auf einer einsamen Insel sind (abzählbar) unendlich viele Schiffbrüchige gestrandet. Sie fangen sofort an, aus den dort wachsenden Bäumen ein Boot zu bauen, um damit die Insel zu verlassen. Nach Fertigstellung zeigt sich jedoch, dass nur n Schiffbrüchige in dem Boot Platz haben, wobei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt sei.
Um zu entscheiden, wer die Insel mit dem Boot verlassen darf, einigen sich die Schiffbrüchigen auf folgende Prozedur. Jeder von ihnen benennt Präferenzen, z.B. der Art "wenn Schiffbrüchiger 7 ins Boot kommt, dann ich selbst nicht, und es sollen nicht die Schiffbrüchigen 19 und 37 zusammen hier bleiben", etc. Aufgrund von Zeitmangel darf jeder Schiffbrüchige in seinen Präferenzen nur endlich viele Personen benennen. Es soll dann festgestellt werden, ob es eine Auswahl von Schiffbrüchigen gibt, die in das Boot steigen sollen, so dass alle Präferenzen erfüllt sind.

(a) Legen Sie Aussagenvariablen fest und ordnen Sie diesen intuitive Bedeutungen zu, um den obigen Sachverhalt in der Aussagenlogik zu modellieren. *(1 Punkt)*

(b) Die Präferenzen des i-ten Schiffbrüchigen seien als aussagenlogische Formel φ_i über den Variablen aus Aufgabenteil (a) gegeben. Geben Sie eine Formelmenge Φ an, die erfüllbar ist, gdw. es eine Auswahl von höchstens n Schiffbrüchigen gibt, die alle Präferenzen eines jeden Schiffbrüchigen erfüllt. *(2 Punkte)*
Hinweis: Es ist nicht möglich, "es gibt höchstens n Schiffbrüchige" direkt auszudrücken. Man kann jedoch "es gibt nicht $n+1$ Schiffbrüchige" relativ leicht ausdrücken, was denselben Sachverhalt widerspiegelt.

Eine Menge M von Schiffbrüchigen steht *in Konflikt*, wenn es keine solche Auswahl von maximal n Personen gibt, die alle Präferenzen von Schiffbrüchigen in M erfüllt.

(c) Zeigen Sie, dass folgendes gilt. Wenn die unendlich vielen Schiffbrüchigen in Konflikt stehen, dann gibt es eine nicht-leere, endliche Teilmenge M der Schiffbrüchigen, die bereits in Konflikt steht. *(2 Punkte)*

(d) Geben Sie konkrete Präferenzen φ_i an (als aussagenlogische Formeln), so dass

- die unendliche Menge aller Schiffbrüchigen in Konflikt steht und zusätzlich
- man unendlich oft eine in Konflikt stehende, endliche Teilmenge davon entfernen kann, so dass der Rest jedes Mal weiterhin in Konflikt steht. *(1 Punkt)*