

Klausur zur Vorlesung Logik für Informatiker

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 min. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Schreiben Sie Ihren vollständigen Namen und Ihre Matrikelnummer deutlich lesbar auf dieses Deckblatt. Schreiben Sie auch Ihren Namen in die Kopfzeile auf **jedem Blatt** der Klausurangabe! Geben Sie alle benutzten Blätter ab. Lesen Sie die Aufgabenstellungen vollständig durch, bevor Sie mit der Bearbeitung der Aufgaben beginnen. Es gibt 5 unterschiedlich gewichtete Aufgaben zu insgesamt 49 Punkten. Mit 25 Punkten haben Sie sicherlich bestanden. Die Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Kontrollieren Sie, ob Sie alle Aufgabenblätter erhalten haben. Aufgabenstellungen befinden sich auf den Seiten 1–10. Kennzeichnen Sie auf den Rückseiten – falls Sie sie benutzen – klar, welche Aufgaben Sie bearbeiten. Streichen Sie alles das, was nicht korrigiert werden soll, durch. Verwenden Sie nur dokumentenechte Stifte und weder die Farben rot noch grün.

☐ Kreuzen Sie dieses Kästchen an, wenn Sie **nicht** wollen, dass das Ergebnis Ihrer Klausur mit Ihrer Matrikelnummer im Internet veröffentlicht wird.

☐ Kreuzen Sie dieses Kästchen an, wenn Ihre Klausur **nicht** bewertet werden soll.

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Hiermit erkläre ich die Richtigkeit der obigen Angaben.

(Unterschrift)

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	Note
Punkte	10	10	8	12	9	49	
erreicht							

Aufgabe 1 (Verschiedenes):**(10 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben enthalten jeweils eine Frage. Beantworten Sie diese mit “Ja” oder “Nein” und begründen Sie Ihre Antwort jeweils *kurz*, z.B. indem Sie ein Beispiel angeben oder auf Sätze aus der Vorlesung verweisen, etc.

- a) Gibt es eine *einstellige* boolesche Funktion f , die alleine – also eigentlich die Menge $\{f\}$ – funktional vollständig ist?
- b) Gibt es eine *zweistellige* boolesche Funktion f , die alleine funktional vollständig ist?
- c) Gibt es eine aussagenlogische Formel φ , so dass sowohl φ als auch $\neg\varphi$ unerfüllbar sind?
- d) Gibt es aussagenlogische Formeln, die sowohl in konjunktiver als auch in disjunktiver Normalform sind?
- e) Angenommen, L_1, L_2 sind zwei endliche Mengen von aussagenlogischen Literalen, so dass $L_1 \subseteq L_2$ gilt. Ist die Formel $(\bigwedge L_2) \implies \bigwedge L_1$ allgemeingültig?
- f) Sei φ eine FO-Formel mit einer freien Variable x und $y \neq x$. Gilt für *jedes* solche φ , dass $\varphi \Leftrightarrow \varphi[y/x]$?
- g) Ist die FO-Formel $\exists x.\forall y.R(x, y) \wedge \neg R(y, x)$ erfüllbar?
- h) Hat FO über einer beliebigen Signatur die kleine Modelleigenschaft?

- i) Gibt es eine FO-Formel $\varphi(x, y, z)$, die über gerichteten Graphen interpretiert, ausdrückt, dass z auf einem Pfad von x aus nach y vorkommt?
- j) Ist die Modallogik-Formel $\Box(\Diamond q \wedge \neg \Box q) \wedge \Diamond \Box \neg q$ erfüllbar?

Aufgabe 2 (Aussagenlogik):**(4+2+4 Punkte)**

Sei $\varphi = (A \rightarrow \neg B) \wedge (B \vee (\neg C \wedge A))$.

a) Geben Sie die Wahrheitstafel für φ an.

b) Geben Sie eine zu φ äquivalente Formel in konjunktiver Normalform an.

c) Entscheiden Sie mit Hilfe des DPLL-Algorithmus, ob die Klauselmenge

$$\mathcal{K} = \{\{A, B, C\}, \{\neg B, D, \neg E\}, \{\neg D, G\}, \{E, G\}, \{\neg C, \neg E, F\}, \{\neg F, B\}, \{\neg F, A\}, \{\neg C, \neg G\}\}$$

erfüllbar ist und geben Sie im positiven Fall eine erfüllende Belegung an. Geben Sie für jeden Aufruf der DPLL-Methode folgendes an.

- die zu verarbeitende Formelmenge
- das Ergebnis der Unit-Propagation
- die verzweigende Variable und der ihr zugewiesene Wert

1. Aufruf: Formelmenge: $\mathcal{K}$
 nach Unit-Propagation: $\mathcal{K}$
 verzweigende Variable:
 Wert:

2. Aufruf: Formelmenge:
 nach Unit-Propagation:
 verzweigende Variable:
 Wert:

Aufgabe 3 (Sequenzenkalkül):**(2+2+4 Punkte)**

a) Zeigen Sie, dass die Regel

$$(\vee_L) \frac{\Gamma, \varphi \Longrightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \Longrightarrow \Delta}$$

des Sequenzenkalküls für die Aussagenlogik korrekt ist.

Hinweis: Dazu können Sie z.B. annehmen, dass die Konklusion nicht gültig ist, woraus Sie dann folgern müssen, dass eine der beiden Prämissen auch nicht gültig ist.

b) Angenommen man hat einen gerichteten Graphen mit höchstens 3 Knoten, so dass

1. ein Knoten ausgehende Kanten zu allen Knoten hat und
2. zwischen je zwei Knoten mindestens eine Kante besteht.

Begründen Sie informell, warum mindestens ein Knoten in diesem Graphen eingehende Kanten von allen anderen Knoten haben muss.

c) Sei $\tau = (R, c_0, c_1, c_2)$ eine Signatur, wobei c_0, c_1, c_2 Konstantensymbole und R ein zweistelliges Relationssymbol ist. Zeigen Sie im Sequenzenkalkül für FO mit den beiden zusätzlichen Regeln

$$\frac{t \doteq c_0, \Gamma \Longrightarrow \Delta \quad t \doteq c_1, \Gamma \Longrightarrow \Delta \quad t \doteq c_2, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta} \quad \frac{R(t_1, t_2), \Gamma \Longrightarrow \Delta \quad R(t_2, t_1), \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta}$$

wobei t, t_1, t_2 beliebige Terme sind, dass die Sequenz

$$\forall y. R(c_0, y) \Longrightarrow \exists x. \forall y. \neg(y \doteq x) \rightarrow R(y, x) \quad (\star)$$

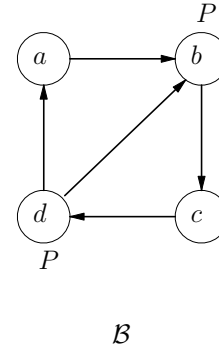
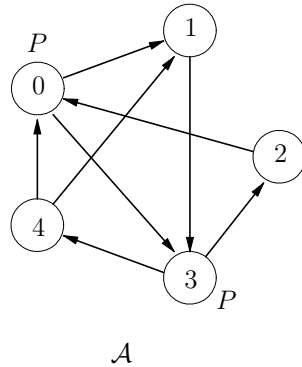
beweisbar ist.

Hinweis 1: Die linke Regel formalisiert die Aussage, dass eine Struktur höchstens 3 Elemente hat. Die rechte Regel formalisiert, dass je zwei Elemente in der einen oder anderen Richtung in Relation R zueinander stehen. Der Antezedens von $(\star)$ besagt, dass ein Element in Relation R zu allen Elementen steht. Der Sukzedens von $(\star)$ besagt, dass ein Element in umgekehrter Relation R mit allen anderen steht. Folgen Sie deswegen am besten beim Aufbau des Beweises Ihrer Argumentation in Teil (b).

Hinweis 2: Eine Teilerleitung können Sie weglassen, falls diese ähnlich zu einer bereits gefunden Herleitung ist und Sie angeben, wie die eine Herleitung aus der anderen hervorgeht.

Aufgabe 4 (Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele):**(2+2+3+2+2+1 Punkte)**

Die folgenden beiden Strukturen über der Signatur $(\rightarrow, P)$ seien gegeben. Dabei ist $\rightarrow$ eine zweistellige Relation und P eine einstellige Relation. Die Symbole $0, \dots, 4, a, \dots, d$ sind nicht Teil der Signatur, sondern dienen lediglich dazu, die Elemente der beiden Strukturen zu benennen.

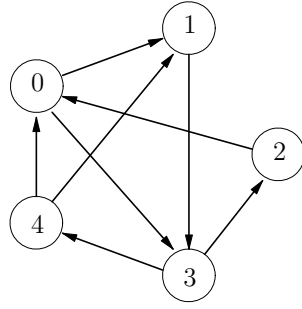
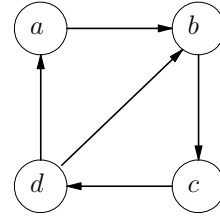


a) Geben Sie das kleinste k an, so dass Spieler **S** das Spiel $\mathcal{G}_k^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ gewinnt. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie einen FO-Satz φ an, so dass $\mathcal{A} \models \varphi$, aber $\mathcal{B} \not\models \varphi$ gilt.

c) Geben Sie drei maximale partielle Isomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ an, also solche, die sich nicht mehr erweitern lassen, ohne die Eigenschaft, partieller Isomorphismus zu sein, zu verletzen.

Betrachten Sie nun die beiden folgenden Strukturen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$, die aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dadurch entstehen, dass man die Relation P in beiden als leere Menge interpretiert.

 $\mathcal{A}'$  $\mathcal{B}'$

d) Geben Sie nun das kleinste k an, so dass Spieler **S** das Spiel $\mathcal{G}_k^{\mathcal{A}', \mathcal{B}'}$ gewinnt und begründen Sie Ihre Antwort.

e) Geben Sie einen FO-Satz φ' an, so dass $\mathcal{A}' \models \varphi'$, aber $\mathcal{B}' \not\models \varphi'$ gilt und außerdem φ' verschieden von Ihrem φ aus Teilaufgabe (b) ist.

f) Lässt sich Teilaufgabe (e) mit einem FO-Satz φ' lösen, der nur $k-1$ viele Quantoren benutzt, wobei k die Lösung aus Teilaufgabe (d) ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (Prädikatenlogik):**(2+1+1+2+3 Punkte)**

Sei $\tau = (\circ, i, e)$, wobei $\circ$ ein 2-stelliges, i ein 1-stelliges und e ein 0-stelliges Funktionssymbol sind. Intuitiv soll $\circ$ eine Multiplikationsoperation mit neutralem Element e und Inversen i darstellen. Damit werden also mathematische Gruppen $\mathcal{G} = (G, \circ, i, e)$ modelliert, wobei G eine Menge ist, $\circ : G \times G \rightarrow G$, $i : G \rightarrow G$ und $e \in G$.

a) Geben Sie drei FO-Sätze an, die – über einer τ -Struktur interpretiert – besagen, dass

- $\circ$ assoziativ ist,
- e neutrales Element bzgl. $\circ$ ist und
- das Produkt mittels $\circ$ aus einem Element mit seinem durch i gegebenen Inversen e ist,

wenn sie über einer τ -Struktur interpretiert werden.

$\varphi_{ass} :=$

$\varphi_{neu} :=$

$\varphi_{inv} :=$

b) Sei $\varphi_{Gr} := \varphi_{ass} \wedge \varphi_{neu} \wedge \varphi_{inv}$. Geben Sie eine τ -Struktur $\mathcal{G} = (G, \circ, i, e)$ mit genau 3 Elementen an, die φ_{Gr} erfüllt.

$G = \{a, b, c\}$

$\circ$	a	b	c
a			
b			
c			

$i(a) =$

$i(b) = \quad e =$

$i(c) =$

Sei $n \geq 1$. Eine Gruppe $\mathcal{G} = (G, \circ, i, e)$ heißt *n-neutral*, wenn für jedes Element x der Gruppe seine n -te Potenz (also die n -malige Multiplikation von x mit sich selbst) gleich dem neutralen Element e ist.

c) Geben Sie eine FO-Formel φ_n über der Signatur τ an, die, wenn sie in einer Gruppe interpretiert wird, besagt, dass diese n -neutral ist. Beachten Sie, dass n nicht Teil der Signatur sondern ein Parameter ist und Sie also im Grunde für jedes solche n die entsprechende Formel angeben müssen.

- d)** Sei $k \geq 1$ und $n_1, \dots, n_k \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Formelmenge $\{\varphi_{Gr}, \neg\varphi_{n_1}, \dots, \neg\varphi_{n_k}\}$ erfüllbar ist, wobei die φ_i jeweils diejenigen aus der Teilaufgabe (c) sind, welche besagen, dass eine Gruppe i -neutral ist.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die folgenden beiden Aussagen, die Sie als gültig annehmen können.

1. Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Gruppe $\mathcal{G}_n = (G_n, \circ, i, e)$ und einem Element $x \in G_n$, so dass die n -te Potenz von x ungleich e ist.
2. Falls G n -neutral ist, so ist G auch $(n \cdot k)$ -neutral für beliebiges $k \geq 1$.

- e)** Zeigen Sie mithilfe von (d) und geeigneten Sätzen über FO, dass es eine Gruppe $\mathcal{G}$ gibt, die nicht n -neutral für jedes $n \geq 1$ ist.