Asymptotische Notation

$$O(f(n)) := \{ g(n) ; \exists c, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 \; 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n) \}$$

$$\Omega(f(n)) := \{ g(n) ; \exists c, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 \; 0 \leq c \cdot f(n) \leq g(n) \}$$

Es gilt: $g(n) \in O(f(n)) \Leftrightarrow f(n) \in \Omega(g(n)).$

$$\Theta(f(n)) := O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$$

$$o(f(n)) := \{ g(n) ; \forall c > 0 \, \exists n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 \; 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n) \}$$

$$\omega(f(n)) := \{ g(n) ; \forall c > 0 \, \exists n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 \; 0 \leq c \cdot f(n) \leq g(n) \}$$

Für $f(n), g(n) > 0$ gilt:

$$f(n) \in o(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Problemtypen

Erreichbarkeit:	Instanz:	Graph G, Ecken s, t.
	Lösung:	Weg von s nach t.

Entscheidungsproblem: Gibt es einen Weg von s nach t ?

Suchproblem: Finde einen Weg von s nach t.

Optimierungsproblem: Finde einen *kürzesten* Weg von s nach t.

Zählproblem: Bestimme die *Anzahl* der Wege von s nach t.

Optimierungsprobleme

Ein *Optimierungsproblem* ist gegeben durch:

- Eine Menge I von Instanzen.
- Für jedes $x \in I$ eine Menge $S(x)$ von potentiellen Lösungen.
- Einer Funktion m, die jedem Paar (x, y) mit $x \in I$ und $y \in S(x)$ ein Maß $m(x, y)$ zuordnet.
- Ein Ziel goal $\in \{\min, \max\}$.

Eine Lösung $y^* \in S(x)$ heißt optimal, wenn

$$m(x, y^*) = m^*(x) := \text{goal}\{\, m(x, y)\,;\ y \in S(x)\,\}$$

$$S^*(x) := \{\, y^* \in S(x)\,;\ m(x, y^*) = m^*(x)\,\}$$

Beispiele

Minimum Path

Instanz:	ungerichteter Graph $G = (V, E)$, Ecken s, t
Lösung:	Weg von s nach t
Maß:	Länge des Weges

Minimum Vertex Cover

Instanz:	ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Lösung:	vertex cover $U \subseteq V$
Maß:	$\|U\|$

Maximum Clique

Instanz:	ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Lösung:	Clique $U \subseteq V$
Maß:	$\|U\|$

Problemvarianten

Zu einem Optimierungsproblem P sind definiert:

konstruktives Problem P_C: Gegeben $x \in I$, finde $y \in S^*(x)$.

Auswertungsproblem P_E: Gegeben $x \in I$, berechne $m^*(x)$.

Entscheidungsproblem P_D: Gegeben $x \in I$ und $k \in \mathbb{N}$,
ist $\mathrm{goal}(m^*(x), k) = m^*(x)$?

Beispiele:

$P = $ Minimum Vertex Cover $\qquad P_D = $ VC.

$P = $ Maximum Clique $\qquad P_D = $ Clique

Die Klassen **NPO** und **PO**

Ein Optimierungsproblem ist in der Klasse **NPO**, falls

1. I ist in **P**.
2. für alle $x \in I$ und $y \in S(x)$, $|y| \leq q(|x|)$, und für alle x, y mit $|y| \leq q(|x|)$ ist $y \in S(x)$ in polynomialer Zeit entscheidbar.
3. m ist in polynomialer Zeit berechenbar.

Eigenschaft: P in **NPO** $\implies$ P_D in **NP**

Ein Optimierungsproblem P in **NPO** ist in der Klasse **PO**, falls das konstruktive Problem P_C in polynomialer Zeit lösbar ist.

Analog: P in **PO** $\implies$ P_D in **P**

NP-harte Optimierungsprobleme

Problem P in $\mathbf{NPO}$ ist $\mathbf{NP}$-hart, falls $Q \leq_T P_C$ für alle $Q \in \mathbf{NP}$.

Eigenschaft: P_D $\mathbf{NP}$-vollständig $\Longrightarrow$ P ist $\mathbf{NP}$-hart.

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{PO} \neq \mathbf{NPO}$$

Minimum Traveling Salesperson

Instanz:	n Städte $c_1, \ldots, c_n$, Distanzmatrix $D \in \mathbb{N}^{n \times n}$
Lösung:	Tour: Permutation $c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}$ der Städte
Maß:	Kosten $\sum_{k=1}^{n-1} D(i_k, i_{k+1}) + D(i_n, i_1)$

Satz: Minimum Traveling Salesperson ist $\mathbf{NP}$-hart.