Relative Approximation

Definition: Optimierungsproblem P, $x \in I_P$ und $y \in S_P(x)$.

Performance ratio: $$R(x,y) := \max\left(\frac{m(x,y)}{m^*(x)}, \frac{m^*(x)}{m(x,y)}\right)$$

Relativer Fehler: $$E(x,y) := \frac{|m^*(x) - m(x,y)|}{\max(m^*(x), m(x,y))} = 1 - \frac{1}{R(x,y)}$$

Für eine Konstante $r \geq 1$ ist ein r-Approximationsverfahren ein Algorithmus A, der für jedes $x \in I_P$ ein $A(x) \in S_P(x)$ mit $R(x, A(x)) \leq r$ liefert.

Ein Optimierungsproblem P heißt r-approximierbar, falls es ein Polynomialzeit-r-Approximationsverfahren für P gibt.

Die Klasse **APX**

APX ist die Klasse aller Optimierungsprobleme $P \in$ **NPO**, die r-approximierbar für ein $r \geq 1$ sind.

$$\mathbf{PO} \subseteq \mathbf{APX} \subseteq \mathbf{NPO}$$

APX enthält **NP**-harte Probleme, z.B. Maximum Knapsack, also

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP} \implies \mathbf{PO} \subsetneq \mathbf{APX}$$

Maximum Satisfiability

Instanz:	CNF $D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ in Variablen $x_1, \ldots, x_n$
Lösung:	Bewertung $\alpha : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{0, 1\}$
Maß:	Anzahl der erfüllten Klauseln $\#\{i; \alpha \models D_i\}$

Maximum Satisfiability $\in$ **APX**.

Traveling Salespersons revisited

Satz: Minimum Traveling Salesperson ist nicht in **APX**, außer wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP} \implies \mathbf{PO} \subsetneq \mathbf{APX} \subsetneq \mathbf{NPO}$$

Dagegen ist Minimum Metric Traveling Salesperson $\frac{3}{2}$-approximierbar durch *Christofides Algorithmus*:

- Berechne einen Minimalen Spannbaum T
- Erweitere T zu einem Eulerschen Graphen E:
  - Finde ein minimales Matching M von $\{ c_i ; \deg_T(c_i) \text{ ungerade} \}$
  - Setze $E := T \cup M$
- Berechne eine Euler-Tour in E
- Extrahiere aus dieser eine TSP-Tour

Approximationsschemata

Definition: Ein Polynomialzeit-Approximationsschema für P ist ein Algorithmus A mit

- Eingabe: $x \in I_P$ und $1 < r \in \mathbb{Q}$, Ausgabe: $A(x, r) \in S_P(x)$
- Performance ratio $R(x, A(x, r)) \leq r$
- Laufzeit $|x|^{O(1)}$

PTAS ist die Klasse aller Optimierungsprobleme in **NPO**, für die es ein Polynomialzeit-Approximationsschema gibt.

$$\mathbf{PO} \subseteq \mathbf{PTAS} \subseteq \mathbf{APX} \subseteq \mathbf{NPO}$$

PTAS enthält **NP**-harte Probleme (z.B. MAXIMUM KNAPSACK):

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP} \implies \mathbf{PO} \subsetneq \mathbf{PTAS}$$

Beispiel: ein Approximationsschema

MINIMUM PARTITION

Instanz:	Menge $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, für $x_i \in X$ Gewicht $a_i \in \mathbb{N}$
Lösung:	Partition $X = Y_1 \uplus Y_2$
Maß:	$\max(\sum_{x_i \in Y_1} a_i \, , \sum_{x_i \in Y_2} a_i \,)$

Approximationsschema:

sortiere X so dass $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$

$k := \lceil (2 - r)/(r - 1) \rceil$

finde eine optimale Partition $Y_1 \uplus Y_2 = \{x_1, \ldots, x_k\}$

for $j := k + 1$ to n

if $\sum Y_1 \leq \sum Y_2$

then $Y_1 := Y_1 \cup \{x_j\}$

else $Y_2 := Y_2 \cup \{x_j\}$

Ein Problem in PTAS

MAXIMUM INTEGER KNAPSACK

Instanz:	Menge $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$,		
	für jedes $x_i \in X$:	Gewicht	$a_i \in \mathbb{N}$
		Wert	$p_i \in \mathbb{N}$
	Kapazität $b \in \mathbb{N}$		
Lösung:	Funktion $c : X \to \mathbb{N}$ mit $\sum_{x_i \in Y} c(x_i) a_i \leq b$		
Maß:	Gesamtwert $\sum_{x_i \in Y} c(x_i) p_i$		

Approximationsschema für Integer Knapsack

sortiere X so dass $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$

$c := \vec{0}$

$\delta := \lceil \frac{1}{(r-1)} \rceil$

for all f with $\sum f(x_i) \leq \delta$ and $\sum f(x_i) a_i \leq b$

  $k := \max_i f(x_i) > 0$

  $b_k := b - \sum f(x_i) a_i$

  sei $x_m \in \{x_k, \ldots, x_n\}$ mit $\frac{p_m}{a_m}$ maximal

  $f(x_m) := f(x_m) + \lfloor \frac{b_k}{a_m} \rfloor$

  if $\sum f(x_i) p_i \ \geq \ \sum c(x_i) p_i$ then

    $c := f$

$\mathbf{APX}$ versus $\mathbf{PTAS}$

Lückentechnik: Sei Q $\mathbf{NP}$-vollständig und $P \in \mathbf{NPO}$. Wenn es Funktionen $f : I_Q \to I_P$ und $c : I_Q \to \mathbb{N}$ in $\mathbf{FP}$ gibt mit

$$m^*(f(x)) \leq c(x) \qquad \text{für } x \in Y_Q$$

$$m^*(f(x)) \geq c(x)(1 + G) \qquad \text{für } x \in N_Q$$

für ein $G > 0$, dann ist P nicht r-approximierbar für $r < 1 + G$.

Satz: Falls $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, dann ist Minimum Bin Packing nicht in $\mathbf{PTAS}$.

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP} \implies \mathbf{PO} \subsetneq \mathbf{PTAS} \subsetneq \mathbf{APX} \subsetneq \mathbf{NPO}$$

Volle Approximationsschemata

Definition: Ein volles Polynomialzeit-Approximationsschema für P ist ein Algorithmus A mit

- Eingabe: $x \in I_P$ und $1 < r \in \mathbb{Q}$, Ausgabe: $A(x, r) \in S_P(x)$
- Performance ratio $R(x, A(x, r)) \leq r$
- Laufzeit polynomial in x und $\frac{1}{r-1}$

FPTAS ist die Klasse aller Optimierungsprobleme in **NPO**, für die es ein volles Polynomialzeit-Approximationsschema gibt.

$$\mathbf{PO} \subseteq \mathbf{FPTAS} \subseteq \mathbf{PTAS} \subseteq \mathbf{APX} \subseteq \mathbf{NPO}$$

FPTAS enthält **NP**-harte Probleme (z.B. Maximum Knapsack):

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP} \implies \mathbf{PO} \subsetneq \mathbf{FPTAS}$$

Asymptotische Approximationsschemata

Definition: Ein asymptotisches Polynomialzeit-Approximations-schema für P ist ein Algorithmus A mit

- Eingabe: $x \in I_P$ und $1 < r \in \mathbb{Q}$, Ausgabe: $A(x, r) \in S_P(x)$
- Performance ratio $R(x, A(x, r)) \leq r + \frac{k}{m^*(x)}$ für k konstant
- Laufzeit $|x|^{O(1)}$

PTAS$^\infty$ ist die Klasse aller Optimierungsprobleme in **NPO**, für die es ein asymptotisches Polynomialzeit-Approximationsschema gibt.

$$\mathbf{PTAS} \subseteq \mathbf{PTAS}^\infty \subseteq \mathbf{APX}$$