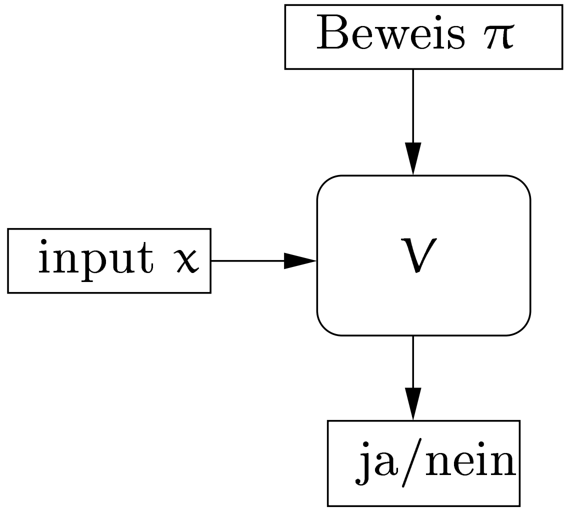
NP = Prüfen von Beweisen

Nichtdeterministische TM (Verifikator):



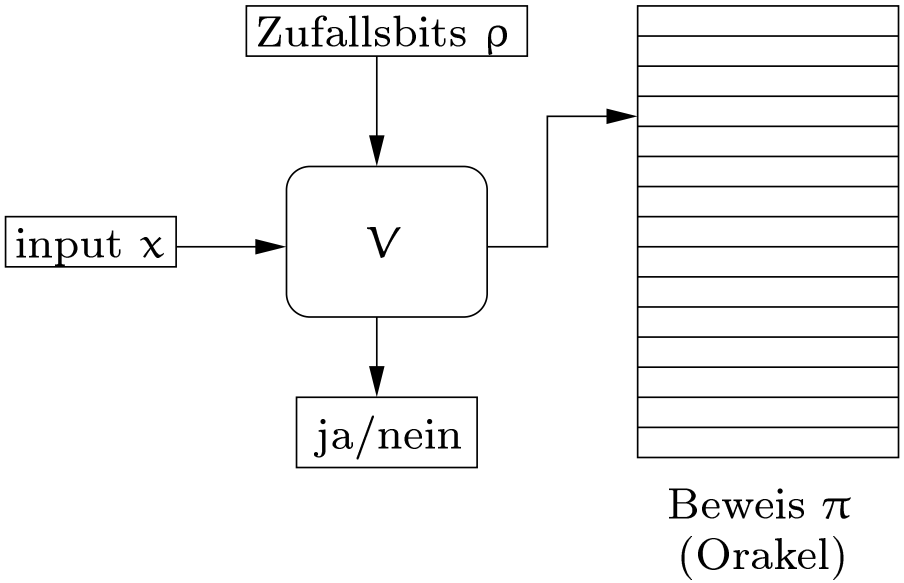
Entscheidungsproblem P ist in **NP** gdw. es gibt Verifikator V mit

$$x \in Y_P \quad \longrightarrow \quad \exists \pi \quad V(x, p) = \text{ja}$$

$$x \in N_P \quad \longrightarrow \quad \forall \pi \quad V(x, p) = \text{nein}$$

Probabilistisch überprüfbare Beweise

Verifikator:



Verifikator V ist $(r(n), q(n))$-beschränkt, falls bei $|x| = n$

- V liest $\leq r(n)$ Zufallsbits,
- berechnet daraus $\leq q(n)$ Orakelfragen
- entscheidet anhand der Antworten.

Die Klasse PCP

Ein Entscheidungsproblem P ist in $\mathbf{PCP}[r(n), q(n)]$ gdw. es einen $(r(n), q(n))$-beschränkten Verifikator V gibt mit

$$x \in Y_P \quad \rightarrow \quad \exists \pi \;\; \mathbb{P}_\rho[V(x, \rho, \pi) = \text{ja}] = 1$$

$$x \in N_P \quad \rightarrow \quad \forall \pi \;\; \mathbb{P}_\rho[V(x, \rho, \pi) = \text{nein}] \geq \frac{1}{2}$$

Korollar: $\mathbf{NP} = \mathbf{PCP}[0, n^{O(1)}]$

sogar: $\mathbf{NP} = \mathbf{PCP}[O(\log n), n^{O(1)}]$

PCP-Theorem (Arora, Lund, Motwani, Safra, Sudan, Szegedy 92):

$$\mathbf{NP} = \mathbf{PCP}[O(\log n), O(1)]$$

Folgerungen aus dem PCP-Theorem

Satz: Falls $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, so ist MAXIMUM SATISFIABILITY $\notin$ **PTAS**.

Durch Reduktion erhält man:

Satz: Falls $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, so ist MAXIMUM CLIQUE $\notin$ **PTAS**.

Korollar: Falls $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, so ist MAXIMUM CLIQUE $\notin$ **APX**

Beweis des PCP-Theorems

1. $\mathrm{NP} \subseteq \mathbf{PCP}[n^{O(1)}, O(1)]$

2. $\mathrm{NP} \subseteq \mathbf{PCP}[O(\log n), \log^{O(1)} n]$

3. Komposition:

$$\mathrm{NP} \subseteq \mathbf{PCP}[r_1(n), q_1(n)] \qquad \text{und} \qquad \mathrm{NP} \subseteq \mathbf{PCP}[r_2(n), q_2(n)]$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{NP} \subseteq \mathbf{PCP}[r_1(n) + r_2(c \cdot q_1(n)), q_2(c \cdot q_1(n))]$$

Arithmetisierung

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Klauseln} & \mapsto & \text{Polynome über } \mathbb{Z}_2 \\
x & \mapsto & p_x := (1 - x) \\
\bar{x} & \mapsto & p_{\bar{x}} := x \\
D = \ell_1 \vee \ldots \vee \ell_k & \mapsto & p_D := p_{\ell_1} \cdot \ldots \cdot p_{\ell_k} \\
\vec{r} \in \mathbb{Z}_2^m \ , \ C = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m & \mapsto & p_C^{\vec{r}} := r_1 \cdot p_{D_1} + \ldots + r_m \cdot p_{D_m}
\end{array}
$$

Lemma: Für $0 \neq \vec{v} \in \mathbb{Z}_2^m$ gilt: $\mathbb{P}_{\vec{r} \in \mathbb{Z}_2^m}[\sum_i r_i v_i = 1] = \frac{1}{2}$.

Für jede Bewertung α gilt:

$$
\begin{array}{lcl}
\alpha \models C & \to & \mathbb{P}_{\vec{r} \in \mathbb{Z}_2^m}[p_C^{\vec{r}}(\alpha) = 0] = 1 \\
\alpha \not\models C & \to & \mathbb{P}_{\vec{r} \in \mathbb{Z}_2^m}[p_C^{\vec{r}}(\alpha) = 0] = \dfrac{1}{2}
\end{array}
$$

Lineare Funktionen

$f, g : D \to R$ sind δ-*nah*, falls $\mathbb{P}_{x \in D}[f(x) \neq g(x)] \leq \delta$.

Linearitätstest:

Für $g : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2$ sei

$$\mathbb{P}_{x,y \in \mathbb{Z}_2^m}[g(x+y) \neq g(x) + g(y)] \leq \frac{\delta}{2} .$$

Dann ist g δ-nah zu einem *linearen* $f : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2$.

Korrektureigenschaft:

Sei $f : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2$ linear, und $g : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2$ δ-nah zu f. Dann gilt

$$\forall x \in \mathbb{Z}_2^m \qquad \mathbb{P}_{y \in \mathbb{Z}_2^m}[g(x+y) - g(x) = f(x)] \geq 1 - 2\delta .$$

Satz: Sei $a \in \mathbb{Z}_2^n$. Dann gibt es lineare Funktionen

$$A_a : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2 \qquad B_a : \mathbb{Z}_2^{n^2} \to \mathbb{Z}_2 \qquad C_a : \mathbb{Z}_2^{n^3} \to \mathbb{Z}_2$$

so dass $\forall$ Polynome $p \in \mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_n]$ vom Grad 3 gilt

$$p(a) = \alpha_p + A_a(q_{p,1}) + B_a(q_{p,2}) + C_a(q_{p,3})$$

für geeignete $\alpha_p \in \mathbb{Z}_2$, $q_{p,1} \in \mathbb{Z}_2^n$, $q_{p,2} \in \mathbb{Z}_2^{n^2}$ und $q_{p,3} \in \mathbb{Z}_2^{n^3}$, die nur von p abhängen.

Definition: Für $x \in \mathbb{Z}_2^m$, $y \in \mathbb{Z}_2^k$ sei $x \circ y := z \in \mathbb{Z}_2^{mk}$ mit $z_{im+j} := x_i y_j$.

Aus Beweis: $\quad A_a = a$, $B_a = a \circ a$, $C_a = a \circ (a \circ a)$.

A, B, C heissen *konsistent*, falls $\exists a$ mit $A = A_a$, $B = B_a$, $C = C_a$.

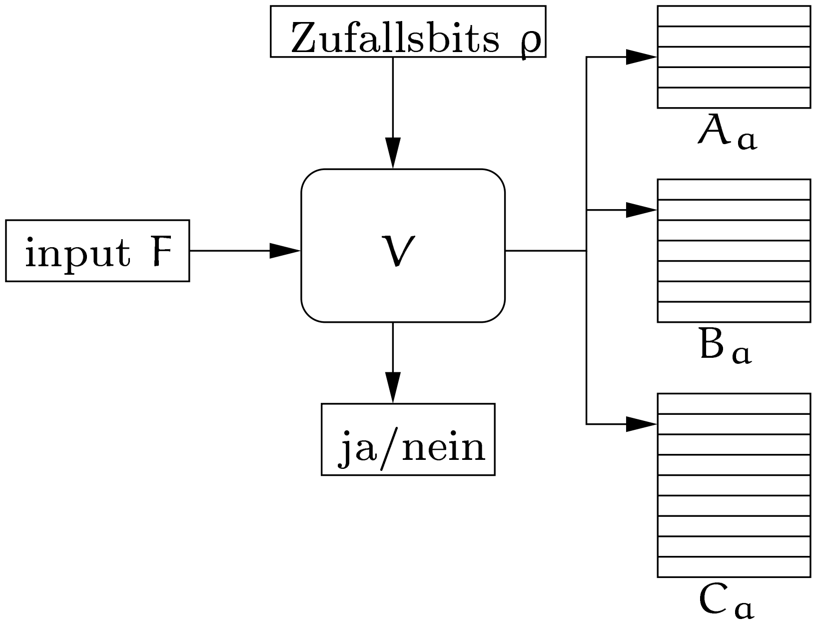
Konsistenztest:

Gegeben: A', B', C' sind δ-nah zu linearen Funktionen A, B, C

> Wähle zufällig $x, x' \in \mathbb{Z}_2^n$;
> $a := A(x)$; $a' := A(x')$; $b := B(x \circ x')$;
> if $aa' \neq b$ then reject;
> Wähle zufällig $x \in \mathbb{Z}_2^n$, $y \in \mathbb{Z}_2^{n^2}$;
> $a := A(x)$; $b := B(y)$; $c := C(x \circ y)$;
> if $ab \neq c$ then reject else accept;

(Berechne A, B, C jeweils mittels Korrektureigenschaft)

Falls A, B, C konsistent sind, akzeptiert der Konsistenztest, andernfalls weist er mit hinreichender Wahrscheinlichkeit zurück.



Verifikator V:

Gegeben: Orakel A, B, C, 3CNF F

Linearitätstest: sind A, B, C δ-nah

zu linearen Funktion A', B', C'

Konsistenztest: gibt es a mit

$A' = A_a$, $B' = B_a$, $C' = C_a$

Wähle zufällig $\vec{r}$, setze $p := p_F^{\vec{r}}$

Berechne α_p, $q_{p,1}$, $q_{p,2}$, $q_{p,3}$

Berechne $\nu := \alpha_p + A_a(q_{p,1})$

$+B_a(q_{p,2}) + C_a(q_{p,3})$

if $\nu = 0$ then accept else reject

Größe des Beweises: $|A_a| + |B_a| + |C_a| = 2^{n^3} + 2^{n^2} + 2^n$

Also: Anzahl der Zufallsbits $= O(n^3)$.

Anzahl der Orakelfragen ist konstant.