Institut für Informatik
der Universität München
Dr. R. Matthes
Dr. J. Johannsen

WS 2001/2002

29. November 2001

Übungen zur Vorlesung
Computergestütztes symbolisches Rechnen

Blatt 3

Aufgabe 7: Zeigen Sie für einen beliebigen Körper K, daß $K[x, y]$ kein Hauptidealring ist. [*Hinweis*: Betrachten Sie das Monomideal $\langle x, y \rangle$ und argumentieren Sie, daß für $f, g \in K[x, y]$ aus $x = fg$ folgt: $f \in K$ oder $g \in K$.]

Aufgabe 8: Seien $f := x^3 - x^2y - x^2z + x$, $g_1 := x^2y - z$, $g_2 := xy - 1$ und die Monomordnung $<_{\mathrm{grlex}}$ zugrundegelegt.

1. Berechnen Sie den Rest r_1 bei Division von f durch (g_1, g_2) und den Rest r_2 bei Division von f durch (g_2, g_1). An welcher Stelle im Divisionsalgorithmus tritt erstmals ein Unterschied zwischen den beiden Berechnungen auf?
2. Sei $r := r_1 - r_2$. Ist $r \in \langle g_1, g_2 \rangle$? Wenn ja, dann geben Sie die zugehörigen Koeffizienten an. Wenn nicht, dann begründen Sie das.
3. Berechnen Sie den Rest von r bei Division durch (g_1, g_2). Warum ist das Ergebnis vorhersagbar, ohne den Algorithmus zu benutzen?
4. Geben Sie ein Polynom $h \in \langle g_1, g_2 \rangle$ an, das kein konstantes Vielfaches von r ist und für das der Rest bei Division durch (g_1, g_2) nicht das Nullpolynom ist.
5. Ist der Divisionsalgorithmus geeignet, um zu entscheiden, ob ein Polynom in $\langle g_1, g_2 \rangle$ liegt?

Aufgabe 9: Seien $g_1 := x^4y^2 - z$, $g_2 := x^3y^3 - 1$, $g_3 := x^2y^4 - 2z$. Finden Sie zwei Polynome in $\langle g_1, g_2, g_3 \rangle$, die nicht konstante Vielfache voneinander sind und für die der Rest bei Division durch (g_1, g_2, g_3) mit Monomordnung $<_{\mathrm{grlex}}$ nicht das Nullpolynom ist.

Besprechung in der Übung am 6. Dezember 2001.