Institut für Informatik
der Universität München
Dr. R. Matthes
Dr. J. Johannsen

WS 2001/2002

6. Dezember 2001

Übungen zur Vorlesung
Computergestütztes symbolisches Rechnen

Blatt 4

Aufgabe 10: Betrachten Sie das folgende Monomideal:

$$I := \left\langle x^k y^\ell \; ; \; k\ell^2 \geq 24 \right\rangle \subseteq K[x, y]$$

Konstruieren Sie ein endliches Erzeugendensystem für I unter Benutzung der Methode aus dem in der Vorlesung gegebenen Beweis von Dicksons Lemma.

Aufgabe 11: Zeigen Sie, dass für die in den Aufgaben 6 und 9 betrachteten Ideale I und die dort angegebenen Erzeugendensysteme $g_1, \ldots, g_s$ unter der Ordnung $<_{\text{grlex}}$ gilt:

$$\langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_s) \rangle \subsetneq \langle \mathrm{LT}(I) \rangle \; .$$

Aufgabe 12: Betrachten Sie die folgenden Polynome:

$$g_1 = x^4 y^2 - z^5 \qquad g_2 = x^3 y^3 - 1 \qquad g_3 = x^2 y^4 - 2z; .$$

Bilden diese Polynome unter $<_{\text{grlex}}$ eine Gröbnerbasis des von ihnen erzeugten Ideals? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 13: Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine reelle Matrix, und sei $J \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ das von den linearen Polynomen

$$g_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j \qquad \text{für } 1 \leq j \leq m$$

erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass die g_i eine Gröbnerbasis für J unter $<_{\text{lex}}$ bilden, wenn A in gelöster Form ist, d.h. es gibt eine streng monoton wachsende Funktion $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ mit $a_{i,j} = 0$ für alle i, j mit $j < f(i)$.

Besprechung in der Übung am 13. Dezember 2001.