Institut für Informatik
der Universität München
Dr. R. Matthes
Dr. J. Johannsen

WS 2001/2002

17. Dezember 2001

Übungen zur Vorlesung
Computergestütztes symbolisches Rechnen

Blatt 5

Aufgabe 14: Zeigen Sie, daß bzgl. der Monomordnung $<_{\mathrm{grlex}}$ auf $\mathbb{Q}[x, y, z]$ die folgende Menge eine Gröbner-Basis bildet:

$$\{xz - y^2, x^3 - z^2, x^2y^2 - z^3, xy^4 - z^4, y^6 - z^5\}$$

[*Hinweis*: Benutzen Sie ein Computeralgebra-System, um mit den S-Polynomen zu rechnen.]

Aufgabe 15: Zeigen Sie folgende Aussage, die eine Verallgemeinerung der entsprechenden Aussage für Gröbner-Basen darstellt: Gegeben sei eine Monomordnung und ein Ideal $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ sowie $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Dann gibt es genau ein $r \in K[x_1, \ldots, x_n]$ so, daß

1. kein Term von r durch irgendein Element von $LT(I)$ teilbar ist
2. $f - r \in I$

Bemerkung: Damit ist es sinnvoll, von der Division von f durch I zu sprechen.

Aufgabe 16: Gegeben sei eine Monomordnung und ein Ideal $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, Gröbner-Basen G und G' von I bzgl. der Monomordnung sowie $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie, daß $\overline{f}^G = \overline{f}^{G'}$.

Aufgabe 17: Gegeben sei eine Monomordnung, ein Ideal $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, eine Gröbner-Basis G von I bzgl. der Monomordnung sowie $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie, daß

1. $\overline{f}^G = \overline{g}^G$ genau dann, wenn $f - g \in I$
2. $\overline{f + g}^G = \overline{f}^G + \overline{g}^G$
3. $\overline{f \cdot g}^G = \overline{\overline{f}^G \cdot \overline{g}^G}^G$ [*Hinweis:* 1.]

Besprechung in der Übung am 20. Dezember 2001.