Institut für Informatik
der Universität München
Dr. R. Matthes
Dr. J. Johannsen

WS 2001/2002

17. Januar 2002

Übungen zur Vorlesung
Computergestütztes symbolisches Rechnen

Blatt 8

Aufgabe 22: Bestimmen Sie alle rationalen Lösungen des folgenden Gleichungssystems, d.h. die von diesem erzeugte Varietät in $\mathbb{Q}^3$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \qquad x^2 + 2y^2 = 5 \qquad xz = 1$$

Aufgabe 23: Eine Monomordnung ist vom ℓten Eliminationstyp, falls jedes Monom, das eine der Variablen $x_1, \dots, x_\ell$ enthält, größer ist als jedes Monom in den Variablen $x_{\ell+1}, \dots, x_n$.

Die Ordnung $<_\ell$ ist definiert wie folgt: für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ gilt $\alpha <_\ell \beta$, falls

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_\ell < \beta_1 + \ldots + \beta_\ell \text{ oder}$$
$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_\ell = \beta_1 + \ldots + \beta_\ell \text{ und } \alpha <_{\text{grevlex}} \beta$$

1. Zeigen Sie, dass $<_\ell$ eine Monomordnung vom ℓten Eliminationstyp ist.
2. Beweisen Sie die folgende Behauptung: Sei G eine Gröbnerbasis für $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ bzgl. $<_\ell$, dann ist $G \cap K[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$ eine Gröbnerbasis für das ℓte Eliminationsideal I_ℓ bzgl. $<_{\text{grevlex}}$.

Aufgabe 24: Betrachten Sie die Fläche E, die definiert ist durch die folgende Parametrisierung:

$$\begin{aligned} x &= 3u + 3uv^2 - u^3 \\ y &= 3v + 3u^2v - v^3 \\ z &= 3u^2 - 3v^2 \end{aligned}$$

1. Finden Sie die Gleichung für die kleinste Varietät V, die die Fläche E enthält.
2. Benutzen Sie den Erweiterungssatz, um zu zeigen, dass E die Varietät V in $\mathbb{C}^3$ ganz ausfüllt.

Besprechung in der Übung am 24. Januar 2002.