Institut für Informatik
der Universität München
Dr. R. Matthes
Dr. J. Johannsen

WS 2001/2002

24. Januar 2002

Übungen zur Vorlesung
Computergestütztes symbolisches Rechnen

Blatt 9

Aufgabe 25: Betrachten Sie das Ideal $\langle f, g\rangle$ mit

$$f = x^2 - y \quad \text{und} \quad g = (y - tx)(y - t) = -txy + t^2x + y^2 - ty \ ,$$

wobei t ein formaler Parameter ist, und legen Sie die Ordnung $<_{\text{lex}}$ mit $x > y$ zugrunde.

1. Berechnen Sie die reduzierte Gröbnerbasis für I in $\mathbb{R}(t)[x, y]$. Welche Polynome in t treten als Nenner auf?
2. Setzen Sie $t = 0$ in f und g, und berechnen Sie eine Gröbnerbasis für I in $\mathbb{R}[x, y]$. Erhalten Sie das gleiche, wenn Sie die Polynome in der Basis aus Teil 1 erweitern, so dass sie in $\mathbb{R}[t, x, y]$ liegen, und dann $t = 0$ setzen?
3. Wie hängt die Varietät $V(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ vom Wert des Parameters t ab? Warum ist $t = 0$ ein besonderer Fall?
4. Führen Sie den ersten Schritt des Buchberger-Algorithmus, die Berechnung von $S(f, g)$ in $\mathbb{R}(t)[x, y]$, von Hand aus. Warum ist der Fall $t = 0$ schon hier speziell?

Aufgabe 26: Sei $I := \langle x + ty, x + y\rangle \subseteq \mathbb{R}(t)[x, y]$.

1. Zeigen Sie, dass $\{x, y\}$ eine reduzierte Gröbnerbasis für I unter $<_{\text{lex}}$ ist.
2. Setzen Sie $t = 1$, und zeigen Sie, dass nun $\{x+y\}$ eine reduzierte Gröbnerbasis für $I \subseteq \mathbb{R}[x, y]$ unter $<_{\text{lex}}$ ist.
3. Warum ist der Fall $t = 1$ speziell, obwohl keine Nenner vorkommen?

Besprechung in der Übung am 31. Januar 2002.