Prof. Martin Hofmann
Steffen Jost

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik

Wintersemester 2002/03
2. Hausaufgabe

Lösungsvorschläge zur 8. Übung

Komplexitätstheorie

Lösung zu H5:

a) Unser üblicher Begriff der polynomiellen Reduktion hilft uns nicht dabei die Klasse P selbst zu verfeinern, da alle Sprachen in P zueinander in polynomieller Zeit reduzierbar sind: Die Berechnung kann einfach in der Reduktion selbst stattfinden. Mit log-Reduzierbarkeit können wir nun aber den Begriff der P-Vollständigkeit einführen.

b) Siehe Beweis von Lemma 8.2 im Buch.

Lösung zu H6: O.B.d.A. sei $s = v_1, v_2, \ldots, v_h = t$ die Knoten des Graphen G. Wir konstruieren folgende Hornformel F über den Variablen $x_1, \ldots, x_h$:

$$x_1 \wedge \bigwedge \big\{ \neg x_i \vee x_j \;\big|\; \text{falls } (v_i, v_j) \in G \big\} \wedge \neg x_h$$

Es gilt: Wenn es einen s,t-Pfad in G gibt, so ist F unerfüllbar. (Warum?)

Es bleibt also zu zeigen, dass wir F in logarithmischen Platz konstruieren können: Gemäß der Definition zählt dabei nur der verbrauchte Platz auf den Arbeitsbändern, nicht aber auf dem Ausgabeband. Nachdem wir die Klauseln x_1 und $\neg x_h$ auf das Ausgabeband geschrieben haben, laufen wir die Nachbarschaftsliste einmal ab und konstruieren die entsprechenden Klauseln. Dazu müssen wir uns aber die Nummer des Knotens merken, dessen Nachbarschaftsliste wir gerade bearbeiten, was lediglich $\log h$ Platz verbraucht, also nach G31 a) logarithmisch in der Länge der Eingabe ist.

Lösung zu H7: Nach dem Satz von Savitch genügt es, einen nicht-deterministischen Algorithmus mit logarithmischem Platzverbrauch anzugeben. Idee:

- Rate eine Position in t, an der wir die p-Variation von w vermuten. Das merken der Position belegt $\log n$ Bandzellen.
- Wir initialisieren einen Zähler z mit $|w|$.
- Nun raten wir die Variation des ersten Zeichens von w, berechnen dieses und prüfen ob es mit dem Zeichen an Position p in t übereinstimmt.
- Falls nein, verwerfen wir, ansonsten erniedrigen wir den Zähler w und erhöhen Positonszähler für t. Falls w negativ wird oder der Positionszähler t überschreitet, verwerfen wir ebenfalls. Ansonsten wiederholen wir nun wieder den vorherigen Punkt.

Lösung zu H8: Wir wissen aus der Vorlesung:

a) QBF $\in$ DSPACE$\big(O(n)\big)$

b) QBF ist PSPACE-vollständig unter $\leq_p$

c) P ist unter $\leq_p$ abgeschlossen

d) DSPACE$\big(O(n)\big) \neq$ PSPACE

Aus P = DSPACE$\big(O(n)\big)$ folgt mit a) auch $QBF \in$ P. Mit b) und c) folgt dann aber auch P = PSPACE und somit der Widerspruch zu d).