Prof. Martin Hofmann
Steffen Jost

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik

Wintersemester 2002/03
9. Januar 2003

Lösungsvorschläge zur 9. Übung

Komplexitätstheorie

Lösung zu G32: *Deferred*

Lösung zu G33: Sei $L \in$ PSPACE mit $L(T) = L$ für eine $p(n)$ platzbeschränkte deterministische Turing Maschine T. Wir konstruieren eine alternierende Turing Maschine mit polynomiell beschränkter Tiefe des Berechnungsbaumes, welche genau dann eine Eingabe x akzeptiert, falls auch T diese akzeptieren würde, wie folgt:

Die Idee des Beweises ähnelt dem Beweis des Theorems von Savitch (G31). Aufgrund der Platzbeschränkung können wir einen globalen Zuständ von T problemlos kodieren. O.B.d.A. nehmen wir an, dass es nur einen globalen akzeptierenden Zustand gibt (man kann alle akzeptierenden Zustände von T so erweitern, das sie vor der Terminierung noch das Band löschen). Desweiteren kann eine akzeptierende Berechnung von T höchstens $2^{cp(|x|)}$ Schritte benötigen. Wir setzten daher einen Zähler z auf den Wert $cp(|x|)$.

Nun raten wir (existentielle Verzweigung) den Zwischenzustand von T bei der Berechnung auf Eingabe x im 2^{z-1}. Schritt. Unser "Gegenspieler" darf nun entscheiden (all Verzweigung) ob wir ihm zeigen sollen wie T in 2^{z-2} Schritten vom Anfangszustand in den Zwischenzustand gelangt oder ob wir beweisen sollen wie T in 2^{z-2} Schritten von dem geratenen Zwischenzustand in den akzeptierenden Zustand gelangt. Dies machen wir natürlich rekursiv,

Wenn z den Wert 0 erreicht, so müssen die beiden Zustände entweder gleich sein oder der erste aus dem zweiten in einem Schritt folgen. Ist das der Fall, so akzeptieren wir; ansonsten lehnen wir ab - vielleicht haben wir ja nur falsch geraten. Im Sinne von G24 ist das "richtige raten" unsere Zugmöglichkeit. Die alternierende Maschine akzeptiert genau dann, wenn wir eine Gewinnstrategie haben, d.h. wenn wir immer die Chance hatten etwas richtiges zu raten.

Da der Zähler polynomiell durch die Eingabe beschränkt war und in jedem Schritt um eins reduziert wird, folgt somit das die Tiefe des Berechnungsbaumes ebenfalls polynomiell beschränkt ist.

Lösung zu G34: Wir müssen zeigen, wie wir beliebige QBF Formeln deterministisch mit linearem Platzverbrauch auf Gültigkeit überprüfen können. Wenn eine QBF Formel mit k boolschen Variablen gegeben ist, so schreiben wir k-viele 0 auf das Arbeitsband, welche eine Belegung der Variablen mit falsch repräsentieren soll. Nun probieren wir verschiedene Belegungen durch. Dabei gehen wir die Variablen immer von der innersten Variable aus durch. Hierbei gibt es mehrere Fälle zu unterscheiden:

- Die Formel ist für die aktuelle Belegung erfüllt.
  - Die betrachtete Variable ist all-quantifiziert.
    - Die betrachtete Variable ist 0.
      Wir setzen die Variable auf 1 und prüfen die Formel erneut.
    - Die betrachtete Variable ist 1.
      Wir setzen die Variable auf 0 und betrachten die nächsthöhere Variable.
  - Die betrachtete Variable ist existentiell-quantifiziert.
    Wir setzen die Variable auf 0 und betrachten die nächsthöhere Variable.
- Die Formel ist für die aktuelle Belegung nicht erfüllt.
  - Die betrachtete Variable ist all-quantifiziert.
    Wir setzen die Variable auf 0 und betrachten die nächsthöhere Variable.
  - Die betrachtete Variable ist existentiell-quantifiziert.
    - Die betrachtete Variable ist 0.
      Wir setzen die Variable auf 1 und prüfen die Formel erneut.
    - Die betrachtete Variable ist 1.
      Wir setzen die Variable auf 0 und betrachten die nächsthöhere Variable.

Sobald wir die nächsthöhere Variable anschauen wollen und dabei feststellen das es keine nächsthöhere mehr gibt, beenden wir akzeptierend falls die letzte Auswertung der Formel Wahr ergab und lehnen ansonsten ab.