Prof. Martin Hofmann
Steffen Jost

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik

Wintersemester 2002/03
24. Oktober 2002

Übung 1

Komplexitätstheorie

Aufgabe G1: Zeige, dass $\mathcal{P}$ unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen ist!

Aufgabe G2: Gegeben sei eine Sprache L, welche von einer deterministischen Turing Maschine M unter Verwendung eines Orakels für eine Sprache L' in polynomialer Zeit erkannt wird. Zeige, dass aus $L' \in \mathcal{P}$ auch $L \in \mathcal{P}$ folgt!

Aufgabe G3 (Wiederholung): Beschreibe eine 2-Band deterministische Turing Maschine mit Alphabet $\Sigma = \{\square, 0, 1, €\}$, welche die Sprache $L = \{1^m 0 1^n \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m \text{ teilt } n\}$ erkennt. Die Frage der Effizienz sei in dieser Aufgabe unbedeutend.

Aufgabe G4: Gegeben sei eine 2-Band deterministische Turing Maschine M.

a) Konstruiere eine 1-Band deterministische Turing Maschine M', welche die gleiche Sprache wie M erkennt.

b) Bei einer Eingabe der Länge n sei die Bearbeitungszeit von M durch $O\big(f(n)\big)$ beschränkt. Zeige, dass die Laufzeit von M' durch $O\big(f(n)^2\big)$ beschränkt ist (ggf. ist die Lösung zu a) nocheinmal zu überdenken).

Aufgabe G5 (Linear Speed-up Theorem): Sei L eine Sprache welche von einer k-Band deterministischen Turing Maschine M in maximal $f(n)$ Schritten erkannt wird, wobei $k \geq 2$ gelte und n wie üblich die Länge der Eingabe bezeichne. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine k-Band deterministische Turing Maschine M' mit Laufzeitbeschränkung $\epsilon \cdot f(n) + (1+\epsilon)n + 2$, welche L ebenfalls erkennt.

a) Eine mögliche (unvollständige) Beweisidee zu dieser Aussage lautet wie folgt:

> "Sei M eine k-Band deterministische Turing Maschine die L erkennt. Dann konstruiere eine k-Band deterministische Turing Maschine M', welche zuerst das Eingabeband umkopiert und dabei jeweils Zeichenketten der Länge j in ein einzelnes neues Zeichen komprimiert (wobei $j > 1$ und das Eingabealphabet genügend groß gewählt sei). Danach wird die Operation von M auf dem komprimierten Band simuliert, wobei j viele Kopfbewegungen (und Lese-/Schreiboperationen) zu einem einzigen Schritt für M' zusammengefaßt werden können, da ja nun ein einziges komprimiertes Zeichen j vielen normalen Zeichen entspricht."

Diskutiere warum diese Idee *nicht* ausreicht um die obige Aussage zu beweisen! Wo steckt der Denkfehler?

b) Beweise die Aussage!

Bemerkung: Um die in der Vorlesung behauptete Aussage, das die Anzahl der Rechenschritte von M' auf einer Eingabe der Länge n für ein $c \in \mathbb{N}$ durch $\max\bigl\{cn, \epsilon \cdot f(n)\bigr\}$ beschränkt ist zu zeigen, muß noch $f(n) \geq n$ gefordert werden. Wenn man sogar $n = o\bigl(f(n)\bigr)$, d.h. $\lim \frac{n}{f(n)} = 0$, fordert, läßt sich auch noch die Konstante c eliminieren.

Aufgabe G6 (Gap Theorem):

a) Sei T eine Turing Maschine und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) \geq n$. Für fast alle n gelte $\max_{|x|=n} \mathrm{TIME}_T(x) \leq f(n)$. Beweise, dass dann auch $L(T) \in \mathrm{DTIME}\bigl(f(n)\bigr)$ gilt!

b) Sei $T_1, T_2, \ldots$ eine konstruktive Aufzählung aller Turing Maschinen. Zeige, dass die Menge $H = \bigl\{(i,n,t) \bigm| \max_{|x|=n} \mathrm{TIME}_{T_i}(x) \leq t\bigr\}$ entscheidbar ist, wobei $\mathrm{TIME}_{T_i}(x)$ die Anzahl der Schritte von T_i angwendet auf Eingabe x ist.

c) Konstruiere mithilfe des vorhergenden Ergebnis eine totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, welche die folgende Aussage erfüllt:

$$\forall i, n \in \mathbb{N}. \Bigl(L(T_i) \in \mathrm{DTIME}\bigl(f(n)\bigr) \vee L(T_i) \notin \mathrm{DTIME}\bigl(2^{f(n)}\bigr) \Bigr)$$

d) *Das Gap Theorem:* Beweise, dass es eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit $\mathrm{DTIME}\bigl(f(n)\bigr) = \mathrm{DTIME}\bigl(2^{f(n)}\bigr)$.

e) Diskutiere die Bedeutung dieses Theorems!