Prof. Martin Hofmann
Steffen Jost

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik

Wintersemester 2002/03
31. Oktober 2002

Übung 2

Komplexitätstheorie

Aufgabe G7: Sei L eine Sprache. Wir definieren L^* als die Sprache aller aus Wörtern von L zusammengesetzten Worten, insbesondere sei auch das leere Wort in L^*.

a) Sei $L \in \mathcal{NP}$. Zeige, dass auch $L^* \in \mathcal{NP}$.

b) Sei $L \in \mathcal{P}$. Zeige, dass dann $L^* \in \mathcal{P}$ folgt.
Stichwort: Dynamische Programmierung

Aufgabe G8 (3-Dimensionales Matching): Es seien U, V, W drei endliche Mengen mit Kardinalität k, sowie $E \subseteq U \times V \times W$ geben. Ein perfektes 3-dimensionales Matching ist eine Menge $E' \subseteq E$, so dass alle $3k$ Elemente von $U \cup V \cup W$ jeweils in genau einem Element von E' enthalten sind.

Zeige, dass das Finden eines perfekten 3-dimensionalen Matchings $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Aufgabe G9: Sei $NT_1, NT_2, \ldots$ eine konstruktive Aufzählung aller nichtdeterministischen Turing Maschinen. Wir definieren

$$L = \big\{(i, x, \underbrace{0 \cdots 0}_{t}) \;\big|\; NT_i \text{ akzeptiert } x \text{ in weniger als } t \text{ Schritten}\big\}$$

Beweise, dass L eine $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache ist!

Aufgabe G10: Bearbeitet G6, sofern noch nicht geschehen! Eventuell einigt Euch in Eurer Gruppe darauf nur eine interessante Teilaufgabe davon zu lösen.

Hausaufgaben (fällig am 14. November 2002)**:**

Aufgabe H1: Zeige, dass $\mathcal{NP}$ unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen ist. Achte dabei auf eine saubere, knappe Ausformulierung Deines Beweises!

Aufgabe H2 (Partitionieren): Sei $A \subset \mathbb{N}$ endlich und $2a = \sum A$. Eine Partitionierung von A sind zwei Mengen A_1, A_2 mit $A = A_1 \cup A_2$ und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ sowie $a = \sum A_1 = \sum A_2$. Beweise, dass das Finden einer Partitionierung im allgemeinen ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem ist!
Hinweis: Benutze die gewonnene Erkenntnis aus Aufgabe G8.

Aufgabe H3: Eine *Horn*-Formel ist eine logische Formel in konjunktiver Normalform, wobei jede Klausel maximal eine negierte Variable enthält.

Zeige, dass die Erfülbarkeit von Horn-Formeln in polynomieller Zeit entscheidbar ist, d.h. gebe einen passenden Algorithmus an. Die Angabe einer entsprechenden Turing Maschine ist hierbei unnötig.

Aufgabe H4: Beweise, das eine Orakelsprache E existiert, so dass $\mathcal{NP}^E \neq co\mathcal{NP}^E$.
Bemerkung: Mit $\mathcal{NP}^L$ sind alle Sprachen gemeint, die sich von nicht deterministischen Turing Maschinen in polynomieller Zeit unter Verwendung eines Orakels für die Sprache L erkennen lassen.