Prof. Martin Hofmann
Steffen Jost

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik

Wintersemester 2002/03
14. November 2002

Übung 4

Komplexitätstheorie

Aufgabe G14 (Zensus-Funktion): Für $L \in \mathcal{NP}$ sei $c_L(n) := \big|\{x \in L \mid |x| \leq n\}\big|$. Zeige, dass das Komplement von L ebenfalls in $\mathcal{NP}$ liegt, falls c_L in polynomieller Zeit berechenbar ist!

Aufgabe G15 (p-Isomorphismus): Zwei Sprachen L_1, L_2 sind *p-isomorph*, falls es eine in polynomieller Zeit berechenbare, bijektive Funktion f gibt, deren Umkehrfunktion ebenfalls in polynomieller Zeit berechnbar ist, welche $x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$ erfüllt.

a) Zeige: Wenn alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Sprachen paarweise p-isomporph sind, dann gilt auch $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
Hinweis: Was folgt aus $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ für die Menge aller $\mathcal{NP}$-vollständigen Sprachen?

Die Vermutung, dass alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Sprachen paarweise zueinander p-isomorph sind, ist als *Isomorphievermutung* oder auch als *Erste Berman-Hartmanis Vermutung* bekannt. Die Gültigkeit dieser Vermutung ist ungeklärt.

Eine Sprache L besitzt die *Padding*-Eigenschaft, falls es zwei in polynomieller Zeit berechnbare Funktionen p_L, d_L gibt mit:

1) $x \in L \iff p_L(x,y) \in L$	2) $\lvert p_L(x,y)\rvert > \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$
3) p_L ist injektiv	4) $d_L\big(p_L(x,y)\big) = y$

für alle Wörter x, y über dem Eingabealphabet.

b) Zeige, dass SAT die Padding-Eigenschaft besitzt.

c) Es seien L_1, L_2 zwei $\mathcal{NP}$-vollständige Sprachen mit der Padding-Eigenschaft. Zeige, dass es dann auch eine polynomiell Zeit beschränkte, berechenbare, verlängernde (d.h. $|f(x)| > |x|$), injektive Reduktion f gibt, die L_1 auf L_2 reduziert und deren Umkehrfunktion in polynomieller Zeit berechenbar ist.

*d) Beweise: Zwei Sprachen sind p-isomorph, wenn sie jeweils durch polynomiell Zeit beschränkte, berechenbare, verlängernde, injektive Reduktionen ineinander überführbar sind.

e) Zeige, dass jede $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache, welche die Padding-Eigenschaft besitzt, p-isomorph zu SAT ist.

Aufgabe G16:

a) Zeige, dass für zwei p-isomorphe Sprachen L_1, L_2 zwei Polynome p_1, p_2 existieren mit $c_{L_1}(n) \leq c_{L_2}(p_1(n))$ und $c_{L_2}(n) \leq c_{L_1}(p_2(n))$.

b) Beweise, dass es keine dünn besetzte Sprache gibt, welche zu SAT p-isomorph ist.
Bemerkung: Die *Zweite Berman-Hartmanis Vermutung*, dass es im Fall $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ keine dünn besetzte $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache geben kann, wurde 1980 bewiesen.