Prof. Martin Hofmann
Steffen Jost

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik

Wintersemester 2002/03
21. November 2002

Übung 5

Komplexitätstheorie

Heute widmen wir uns der Polynomialzeit-Hierarchie:

$$\begin{array}{lll} \Sigma_0^P = \mathcal{P} & \Pi_0^P = \mathcal{P} & \Delta_0^P = \mathcal{P} \\ \Sigma_{k+1}^P = \mathcal{NP}^{\Sigma_k^P} & \Pi_{k+1}^P = \text{co-}\Sigma_{k+1}^P & \Delta_{k+1}^P = \mathcal{P}^{\Sigma_k^P} \end{array}$$

Aufgabe G17: Wir beweisen Spezialfälle des Theorems aus der Vorlesung (Theorem 7.3 im Buch):

a) Zeige, dass eine Sprache L genau dann in $\mathcal{NP}$ ist, falls es eine Sprache A in $\mathcal{P}$ und ein Polynom p mit $x \in L \iff \exists y.\, |y| \leq p(|x|) \wedge \langle x, y\rangle \in A$.

b) Zeige, dass eine Sprache L genau dann in $co\mathcal{NP}$ ist, falls es eine Sprache A in $\mathcal{P}$ und ein Polynom p mit $x \in L \iff \forall y.\big(|y| \leq p(|x|) \rightarrow \langle x, y\rangle \in A\big)$.

c) Zeige, dass eine Sprache L genau dann in $\mathcal{NP}^{\mathrm{SAT}}$ ist, falls es eine Sprache A in $\mathcal{P}$ und ein Polynom p gibt mit

$$x \in L \iff \exists y_1.\forall y_2.\, |y_1| \leq p(|x|) \wedge \big(|y_2| \leq p(|x|) \rightarrow \langle x, y_1, y_2\rangle \in A\big)$$

Aufgabe G18: Zeige, dass aus $\Sigma_k^P \subseteq \Pi_k^P$ auch $\Sigma_k^P = \Pi_k^P$ folgt.

Aufgabe G19: Es ist $\mathcal{PH} = \bigcup_i \Sigma_i^P$. Beweise folgende Implikationen für ein festes aber beliebiges $k \in \mathbb{N}$:

a) $\Sigma_k^P = \mathcal{PH} \implies \Sigma_k^P = \Pi_k^P$

b) $\Sigma_{k+1}^P = \Pi_{k+1}^P \implies \Sigma_{k+1}^P = \Sigma_{k+2}^P$

c) $\Sigma_k^P = \Sigma_{k+1}^P \implies \Sigma_k^P = \mathcal{PH}$

Was würde daraus folgen, wenn es ein k gäbe mit $\Sigma_k^P \neq \Sigma_{k+1}^P$, insbesondere für $k = 0, 1$?