Prof. Martin Hofmann
Steffen Jost

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik

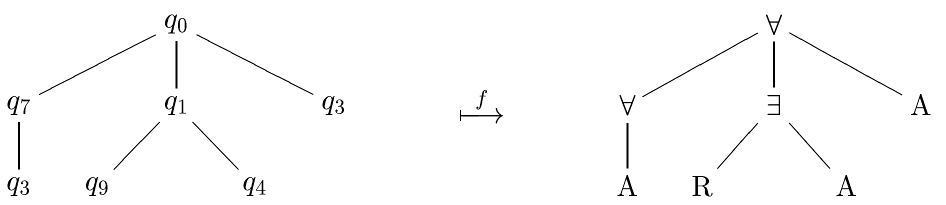
Wintersemester 2002/03
28. November 2002

Übung 6

# Komplexitätstheorie

*Definition:* Eine *alternierende* Turing Maschine besteht aus einem 5-tupel $\langle Q, \Sigma, I, q_0, f \rangle$, wobei die ersten vier Kompenenten analog zu einer nicht deterministischen Turing Maschine definiert sind und die letzte Komponente $f$ eine Funktion $f : Q \to \{\forall, \exists, \text{Accept}, \text{Reject}\}$ bezeichne. Die Menge $\{q \in Q \mid f(q) \in \{\text{Accept}, \text{Reject}\}\}$ ist dann die Menge aller Endzustände der Turing Maschine.

Um festzustellen, ob eine Berechnung einer alternierenden Turing Maschine eine Eingabe $x$ akzeptiert, muss man den Berechnungsbaum zur Eingabe $x$ betrachten:




Wir sagen das ein Knoten im Berechnungsbaum auf Eingabe $x$ mit zugehörigem Zustand $q_i$ *akzeptiert*, falls

a) $f(q_i) = \text{Accept}$

b) $f(q_i) = \forall$ und alle Söhne akzeptieren

c) $f(q_i) = \exists$ und mindestens ein Sohn akzeptiert

Die Eingabe $x$ gilt als akzeptiert, wenn die Wurzel des Berechnungsbaumes auf $x$ akzeptiert.

Eine $k$-*alternierende* Turing Maschine ist eine alternierende Turing Maschine mit der Eigenschaft, das auf jedem möglichen Berechnungspfad zu einer beliebigen Eingabe, sich der Wert von $f$ auf den Knoten des Pfades höchstens $k$-mal ändert (dabei zählen wir die letzte Änderung in Accept oder Reject mit). Für $f(q_0) = \exists$ sprechen wir auch von einer $\Sigma_k$-Turing Maschine; ist dagegen $f(q_0) = \forall$, so sprechen wir von einer $\Pi_k$-Turing Maschine.

Analog zu einer nicht deterministischen Turing Maschine gilt eine (k-)alternierende Turing Maschine als polynomiell Zeit beschränkt, falls die Länge aller Berechnungspfade polynomiell durch die Länge der Eingabe beschränkt ist.

**Aufgabe G20:** Welche Komplexitätsklassen lassen sich mit polynomiell Zeit beschränkten $\Sigma_k$ und $\Pi_k$-Turing Maschinen berechnen (inbesondere für $k = 1$)?

**Aufgabe G21*:** *Wer diese Aufgabe ehrlich und ohne fremde Hilfe löst, erhält dafür zur Belohnung eine Flasche Glühwein von Prof. Hofmann!*

Zeige, dass die Sprache $L = \{x\#y\#z \mid |x| = |z| \text{ mit } x, y, z \in \Sigma^*\}$, wobei wir $\# \notin \Sigma$ annehmen, von einer alternierenden 1-Band Turing Maschine in linearer Zeit erkannt werden kann.

*Da wir in der Übung aber ohnehin nüchtern bleiben wollen, bearbeiten wir lieber ersteinmal die nächste Aufgabe:*

**Aufgabe G22:** Zeige, dass die Sprache $L = \{x\#y\#z \mid x = z \text{ mit } x, y, z \in \Sigma^*\}$, wobei wir $\# \notin \Sigma$ annehmen, von einer alternierenden 1-Band Turing Maschine in linearer Zeit erkannt werden kann.

*Hinweis:* Wir dürfen dazu vorübergehend annehmen, dass wir Aufgabe G21 gelöst hätten.

*Bemerkung:* Es ist bekannt, dass eine deterministische Turing Maschine $L$ nur dann in linearer Zeit erkennen kann, wenn ihr mindestens 2 Bänder zur Verfügung stehen. Man kann in der Tat auch allgemein zeigen, dass die Erhöhung der Bandzahl für alternierende Turing Maschinen unbedeutend ist.

**Aufgabe G23 (Chomp):** Das *Chomp*-Spiel ist wie folgt beschrieben: Zwei Spieler teilen sich eine handelsübliche Tafel Schokolade mit $n \times m$-Kästchen. Abwechselnd müssen beide Spieler jeweils ganze, verbleibende Rippen der Schokolade (also horizontale oder vertikale Reihen) entfernen und aufessen. Der Spieler, der die linke untere Ecke der Tafel ißt hat verloren.

a) Beschreibe eine alternierende Turing Maschine, die berechnet ob für eine gegebene Chomp-Position der am Zug befindliche Spieler garantiert gewinnen kann.

b) Beschreibe nun eine deterministische Maschine, die berechnet ob für eine gegebene Position des Chomp-Spiels der am Zug befindliche Spieler garantiert gewinnen kann. Zeige, dass die Rechenzeit dieser Maschine polynomiell in der Länge der Eingabe beschränkt ist!

c) Diskutiere die Lösbarkeit der beiden vorangehenden Teilaufgaben nocheinmal für folgende Variante des Spiels: Anstatt ganze Reihen herauszubrechen, müssen die Spieler jeweils ein Feld auswählen und dann dieses Feld, sowie alle Felder die sich rechts oberhalb befinden aufessen.

**Aufgabe G24:** Gegeben sei eine alternierende Turing Maschine $M$. Beschreibe ein zugehöriges Zwei-Personen-Spiel, in Abhängigkeit von einer Eingabe $x$, so daß ein Spieler genau dann eine Gewinnstrategie hat, wenn $M$ die Eingabe $x$ akzeptiert.

**Aufgabe G25:** Erkläre Deinen Mitstudenten Deine Lösungen zu H1-H4!