Prof. Martin Hofmann
Steffen Jost

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik

Wintersemester 2002/03
12. Dezember 2002

Übung 8

# Komplexitätstheorie

**Aufgabe G30:** Die 1-Band Turing Maschine $M$ mit Eingabealphabet $\Sigma = \{0,1\}^*$ ist wie folgt definiert:

| $Q$ | $s$ | $\rightarrow$ | $Q$ | $s'$ | $m$ | $Q$ | $s$ | $\rightarrow$ | $Q$ | $s'$ | $m$ | $Q$ | $s$ | $\rightarrow$ | $Q$ | $s'$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\square$ | | $A$ | 2 | $S$ | 1 | $\square$ | | 2 | 5 | $L$ | 3 | $\square$ | | 2 | 6 | $L$ |
| 0 | 0 | | 3 | 0 | $R$ | 1 | 0 | | 1 | 4 | $R$ | 3 | 0 | | 3 | 4 | $R$ |
| 0 | 1 | | 1 | 1 | $R$ | 1 | 1 | | 1 | 3 | $R$ | 3 | 1 | | 3 | 3 | $R$ |
| 0 | 5 | | 0 | 1 | $R$ | 1 | 5 | | 1 | 5 | $R$ | 3 | 5 | | 3 | 5 | $R$ |
| 0 | 6 | | 0 | 0 | $R$ | 1 | 6 | | 1 | 6 | $R$ | 3 | 6 | | 3 | 6 | $R$ |
| 2 | 0 | | 0 | 0 | $R$ | 2 | 3 | | 2 | 1 | $L$ | 2 | 5 | | 2 | 5 | $L$ |
| 2 | 1 | | 0 | 1 | $R$ | 2 | 4 | | 2 | 0 | $L$ | 2 | 6 | | 2 | 6 | $L$ |

wobei $Q = \{0,1,2,3,A,R\}$ die Zustandsmenge, $s$ das gelesene, $s'$ das zu schreibende Zeichen und $m$ die anschließend durchzuführenden Kopfbewegung bezeichne. 0 sei der Anfangszustand und $A$ der akzeptierende Zustand von $M$. Alle benötigten aber undefinierten Tripel gehen sofort in den ablehnenden Zustand $R$ über.

a) Berechne die Kreuzungssequenzen $s_1, s_2, s_3$ und $s_4$ für die Eingabe

$$\overset{s_1}{|}\,0\,1\,\overset{s_2}{|}\,0\,\square\,\overset{s_3}{|}\,\square\,\square\,\overset{s_4}{|}\,\square\,\square\,\square\cdots$$

b) Zeige, dass die Kreuzungssequenzen $s_2, s_3$ für das Wort '$0\square$' kompatibel sind!

c) Welche der beiden folgenden Tripel sind kompatibel für $M$:

1) $[3,2,2,2,0]$'515'$[3,2,1]$ 2) $[1,2,3]$'515'$[1,2,1]$

**Aufgabe G31:** Wir betrachten das Problem *Reachability*: Gibt es in einem beliebigen gerichteten Graphen, der durch Nachbarschaftslisten gegeben sei, einen gerichteten Weg von dem ausgezeichneten Knoten $s$ zu dem ebenfalls ausgezeichneten Knoten $t$?

a) Welche Größenordung hat diese Kodierung des Graphen in Abhängigkeit der Anzahl $k$ der Knoten?

b) Zeige durch Angabe eines Algorithmus, dass dieses Problem in $\mathrm{NSPACE}\big(O(\log n)\big)$ liegt.

c) Konstruiere entsprechend dem in der Vorlesung behandelten Beweis des Satzes von Savitch[1] einen weiteren Algorithmus und zeige damit, das dieses Problem auch in $\mathrm{DSPACE}\big(O(\log^2 n)\big)$ liegt.

[1] Theorem 8.2 im Buch

## Hausaufgaben:

Die Abgabe der Hausaufgaben muß bis spätestens 9. Januar 2003, 12.00h, erfolgen! Wer nicht zur Übung kommen mag, kann auch vorher auf elektronischem Wege oder im Sekretariat des Lehrstuhls (Z1.05) abgeben.

**Aufgabe H5:** Wir definieren einen neuen Reduzierbarkeitsbegriff: Eine Sprache $A$ sei zu einer Sprache $B$ *log-reduzierbar*, in Symbolen $A \leq_{\log} B$, falls es eine logarithmisch speicherplatzbeschränkte Turingmaschine $M$ mit $x \in A \iff M(x) \in B$ gibt, wobei $M$ sowohl ein Eingabeband und ein Ausgabeband zur Verfügung stehen, deren Platzverbrauch keine Rolle spielt. Allerdings sind auf dem Eingabeband nur (beliebige) Leseoperationen und auf dem Ausgabeband nur einmalige Schreiboperationen[2] möglich.

a) Warum hilft uns der neue Begriff der log-Reduzierbarkeit, wenn wir über Teilklassen von P reden wollen?

b) Zeige, dass die oben angegebene Definition der Log-Reduktion alle Anforderungen an einen sinnvollen Reduktionsbegriff erfüllt.

**Aufgabe H6:** Zeige, dass Reachability (siehe G31) log-reduzierbar zu co-Hornsat (siehe H3) ist.
*Bemerkung:* Ob die Umkehrung gilt ist leider unbekannt. Wenn ja, so würde mit G31 folgen das co-Hornsat ebenfalls in $\mathrm{NSPACE}\big(O(\log n)\big)$ liegt.

**Aufgabe H7 (Approximative Wordsuche):** Das *Wordsuchproblem* ist das folgende: Gegeben sei eine Zeichenkette $t$ der Länge $m$, eine weitere Zeichenkette $w$ mit Länge $m' < m$ und eine natürliche Zahl $p$ in unärer Darstellung. Gibt es eine $p$-Variation von $w$, die in $t$ vorkommt?

Eine *$p$-Variation* ist ein Wort, das man durch maximal $p$-viele Editieroperationen (d.h. ein Zeichen austauschen, einfügen oder löschen) aus einem gegebenen Wort gewinnen kann.

Zeige, dass das Wordsuchproblem in $\mathrm{DSPACE}\big(O(\log^2 n)\big)$ liegt.

*Hinweis:* Man kann annehmen, das ein einmal eingefügtes oder verändertes Zeichen nicht nochmals verändert oder gelöscht wird, bzw. ein gelöschtes Zeichen nicht wieder eingefügt wird. Damit folgt auch: Wenn $a_0 a'_1 \cdots a'_{r'}$ eine $p$-Variation von $a_0 a_1 \cdots a_r$ ist, dann ist auch $a'_1 \cdots a'_{r'}$ eine $p$-Variation von $a_1 \cdots a_r$. Weiterhin sei erneut an den Satz von Savitch erinnert.

**Aufgabe H8:** Es ist unbekannt ob $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{DSPACE}\big(O(n)\big)$ oder $\mathrm{P} \supseteq \mathrm{DSPACE}\big(O(n)\big)$ gilt. Zeige aber, dass $\mathrm{P} \neq \mathrm{DSPACE}\big(O(n)\big)$ gilt!
*Hinweis:* Zur Lösung dieser Aufgabe könnten die in der Vorlesung vom 16.12.2002 gemachten Aussagen zu QBF und DSPACE helfen.

[2] d.h. der Schreibkopf darf sich nur nach rechts bewegen