Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. M. Hofmann
Dr. R. Matthes, M. Lange

WS 02/03

22.10.2002

Übungen zur Vorlesung
Fixpunkte

Blatt 2

Besprechung in der Übung am 30.10.2002

Aufgabe 5: Geben Sie ein Beispiel einer geordneten Menge M an, so dass $x, y, z \in M$ und

1. x, y und z sind paarweise unvergleichbar, und
2. weder $x \sqcup y$ noch $y \sqcup z$ noch $x \sqcup z$ existieren in M, aber
3. $\bigsqcup\{x, y, z\}$ existiert in M.

Aufgabe 6: Eine *Kette* $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Sequenz von Elementen eines Verbandes $(V, \leq)$, so dass für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt: $x_i \leq x_j$ oder $x_j \leq x_i$. Die *Höhe* eines Verbandes ist die maximale Länge einer Kette bestehend aus verschiedenen Elementen.

Sei $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ mit $0 \leq 1$. Auf $\mathbb{B}^k$ ist die komponentenweise Ordnung $\leq_k$ und die Präfixordnung $\preceq_k$ definiert als

$$(a_1, \ldots, a_k) \leq_k (b_1, \ldots, b_k) \;\text{ gdw }\; \forall i \in \{1, \ldots, k\} : a_i \leq b_i$$
$$(a_1, \ldots, a_k) \preceq_k (b_1, \ldots, b_k) \;\text{ gdw }\; \exists i \in \{1, \ldots, k\}, a_i \leq b_i \text{ und } \forall j < i : a_j = b_j$$

Berechnen Sie die Höhen von $(\mathbb{B}^k, \leq_k)$ und $(\mathbb{B}^k, \preceq_k)$.

Aufgabe 7: Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $U_G \subseteq V$ wie folgt definiert

$$U_G := \{v \in V \mid \text{ es gibt keinen unendlichen Pfad in } G, \text{ der mit } v \text{ beginnt}\}$$

a) Definieren Sie eine monotone Funktion $f : 2^V \to 2^V$, so dass $U_G = \mu f$. (Hinweis: Ein unendlicher Pfad besteht aus einer Kante, auf die wieder ein unendlicher Pfad folgt.)

b) Geben Sie ein Beispiel eines Graphen $G = (V, E)$ mit einem Knoten $x \in V$ an, so dass $x \in U_G$, aber $x \notin f_\mu^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. x wird nicht von einem Approximanden mit endlichem Index erfaßt.