Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. M. Hofmann
Dr. R. Matthes, M. Lange

WS 02/03

29.10.2002

Übungen zur Vorlesung **Fixpunkte**

Blatt 3

Besprechung in der Übung am 6.11.2002

Aufgabe 8:

Setze $\mathbb{R}_+^* := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$. Die aus der Analysis wohlbekannte Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, deren Definition uns hier nicht interessiert, hat folgende Eigenschaften:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a)$ für $a \in \mathbb{R}_+^*$

Zeigen Sie *mit den Methoden der Vorlesung*, daß es für alle $a \in \mathbb{N}$ ein $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt mit $\Gamma(a+1) = b$. (Benutzen Sie dabei ohne Beweis, daß Multiplikation nicht aus $\mathbb{N}$ herausführt.)

Aufgabe 9: Wir betrachten endliche Zeichenketten über einem Alphabet Σ. Ein "Zeichen" $\omega \notin \Sigma$ dient uns als Stopp-Zeichen. Setze $M := (\Sigma \cup \{\omega\})^{\mathbb{N}}$ und $\mathcal{U} := 2^M$. Definiere $\mathsf{nil} := \lambda i^{\mathbb{N}}.\omega$ (d. h. konstant das Zeichen ω). Dann $\mathsf{nil} \in M$. Sei nun $\ell \in \Sigma$ und $a \in M$. Dann definiere $b \in M$ durch $b0 := \ell$ und $b(i+1) := ai$ (für $i \in \mathbb{N}$). Bezeichnung: $\mathsf{cons}\,\ell a := b$.

Definiere $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ durch $\Phi A := \{\mathsf{nil}\} \cup \{\mathsf{cons}\,\ell a \mid \ell \in \Sigma, a \in A\}$. Setze $\Sigma^* := \mu\Phi$.

1. Geben Sie das Konstruktionsprinzip für Σ^* an.
2. Zeigen Sie, daß $\Sigma^* = \{\mathsf{nil}\}$, falls $\Sigma = \emptyset$. Hinweis: In diesem Fall ist zu zeigen, daß für alle $a \in \Sigma^*$ gilt: $a \in \{\mathsf{nil}\}$. Nun läßt sich das Induktionsprinzip verwenden.
3. Zeigen Sie, daß es zu jedem $a \in \Sigma^* \setminus \{\mathsf{nil}\}$ ein $\ell \in \Sigma$ und ein $b \in \Sigma^*$ gibt mit $a = \mathsf{cons}\,\ell b$.