Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. M. Hofmann
Dr. R. Matthes, M. Lange

WS 02/03

12.11.2002

Übungen zur Vorlesung
Fixpunkte

Blatt 5

Besprechung in der Übung am 20.11.2002

Aufgabe 13: Geben Sie einen vollständigen Verband an, in dem Komplemente zu allen Elementen existieren, aber nicht eindeutig sind. Ist der Verband boolesch?

Aufgabe 14: Sei $(M, \leq)$ ein boolescher Verband. Mit $\overline{x}$ bezeichnen wir ein $y \in M$, das zu x komplementär ist. Zeigen Sie:

1. Auch das zweite Distributivgesetz gilt: $\forall x, y, z \in M. x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$
2. Komplemente sind eindeutig bestimmt.
3. $\forall x \in M : \overline{\overline{x}} = x$.
4. Größte Fixpunkte lassen sich aus kleinsten Fixpunkten gewinnen: $\nu f(x) = \overline{\mu \overline{f(\overline{x})}}$ für jede monotone Funktion $f : M \to M$.

Aufgabe 15: In Fortsetzung von Aufgabe 9 betrachten wir den größten Fixpunkt $\nu\Phi := \bigcup\{A \subseteq M \mid A \subseteq \Phi A\}$ von Φ. Wegen der Monotonie von Φ haben wir das *Zerlegungsprinzip* $\nu\Phi \subseteq \Phi(\nu\Phi)$. Aus der Definition selbst ergibt sich unmittelbar das *Koinduktionsprinzip* $\forall A \subseteq M. A \subseteq \Phi A \Longrightarrow A \subseteq \nu\Phi$.

1. Leiten Sie aus dem Koinduktionsprinzip das *erweiterte Koinduktionsprinzip*
$$\forall A \subseteq M. A \subseteq \Phi(A \cup \nu\Phi) \Longrightarrow A \subseteq \nu\Phi$$
ab. (Das geht natürlich ganz allgemein.)
2. Zeigen Sie, daß $\nu\Phi \neq \mu\Phi$ durch Angabe eines passenden Elements.
3. Zeigen Sie, daß $\nu\Phi \neq 2^M$. Hinweis: Zeigen Sie das folgende Lemma: Ist $a \in \nu\Phi$, $i \in \mathbb{N}$ und $ai = \omega$, so $a(i+1) = \omega$. (Das wird *nicht* durch Koinduktion zu beweisen sein.)