Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. M. Hofmann
Dr. R. Matthes, M. Lange

WS 02/03

11.12.2002

# Übungen zur Vorlesung
# **Fixpunkte**

Blatt 9
Besprechung in der Übung am 18.12.2002

**Aufgabe 22:** Für Lambda-Terme $r, s, t$ und Variablen $x, y$ gilt

$$\Big(r[x := s]\Big)[y := t] = \Big(r[y := t]\Big)\Big[x := s[y := t]\Big],$$

sofern $x \notin \{y\} \cup \mathsf{FV}(t)$. Beweisen Sie diese Aussage durch Induktion über den Lambda-Term $r$. (Hinweis: Dafür werden Sie brauchen, daß $r[x := s] = r$ für $x \notin \mathsf{FV}(r)$.) Geben Sie Beispiele für die Falschheit der Aussage in Fällen mit $x = y \notin \mathsf{FV}(t)$ und mit $y \neq x \in \mathsf{FV}(t)$ an.

**Aufgabe 23:** $\beta$-Gleichheit $=_\beta$ auf Lambda-Termen wird induktiv definiert durch:

- $(\lambda x r)s =_\beta r[x := s]$.
- Ist $r =_\beta r'$, so $r' =_\beta r$, $\lambda x r =_\beta \lambda x r'$, $rs =_\beta r's$ und $sr =_\beta sr'$.
- $x =_\beta x$.
- Ist $r =_\beta s$ und $s =_\beta t$, so $r =_\beta t$.

Zeigen Sie, daß $=_\beta$ eine Äquivalenzrelation ist und daß aus $r =_\beta r'$ und $s =_\beta s'$ folgt, daß $rs =_\beta r's'$.

**Aufgabe 24:** Die $n$-te Church-Ziffer ist definiert als $\underline{n} := \lambda f \lambda x.\, \underbrace{f(\ldots(f}_{n \text{ mal}}\, x)\ldots)$.
Das schreibt sich leichter als $\lambda f \lambda x. f^n x$ mit folgender Folge von Abkürzungen(!): $r^0 s := s$, $r^{n+1}s := r(r^n s)$. Weiter setzt man $r \circ s := \lambda x. r(sx)$ für eine Variable $x \notin \mathsf{FV}(r) \cup \mathsf{FV}(s)$. Zeigen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen $m, n$ gilt:

- Für alle Lambda-Terme $r$ ist $(\underline{m}\, r) \circ (\underline{n}\, r) =_\beta \underline{m+n}\, r$.
- $\underline{m} \circ \underline{n} =_\beta \underline{m \cdot n}$.
- Für $m \neq 0$ ist $\underline{m}\, \underline{n} =_\beta \underline{n^m}$.

Damit sind Addition, Multiplikation und Exponentiation mittels Church-Ziffern repräsentierbar. Hinweis: Es lohnt sich, passende Lemmas bereitzustellen.