Markov-Ketten und Irrfahrten auf Graphen

Konstantin Kutzkow

15.01.2004

Zusammenfassung

Die folgende Darstellung beschäftigt sich mit Markov-Ketten und deren engen Zusammenhänge mit Irrfahrten auf Graphen und elektischen Netzwerken. Bekannte Probleme wie z.B. das 2-SAT-Problem und Graphalgorithmen für gerichtete und ungerichtete Graphen lassen sich elegant mit Hilfe von Irrfahrten lösen. Im Anschluss werden auch wichtige Sätze über Überdeckungszeiten behandelt.

1 Das 2-SAT Problem

Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik 2-SAT ist das folgende:
Gegeben sei eine Formel der Aussagenlogik in konjunktiver Normalform (KNF) mit höchstens 2 Literalen pro Klausel, z.B.

$$(A \vee \neg B) \wedge (B \wedge C) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (D \vee \neg A)$$

, wo A, B, C und D Variablen sind. Die Frage lautet, ob eine Wahrheitsbelegung der Variablen existiert, für die die Formel erfüllt wird. Im obigen Beispiel ist A=false, B=true, C=true und D=true eine erfüllende Belegung. Es gibt deterministische Algorithmen, die das Problem in polynomialer Zeit lösen, jetzt betracheten wir aber einen probabilistischen Algorithmus, der 2-SAT mittels einer Irrfahrt löst. Wir konstruieren einen einfachen Monte Carlo Algorithmus. Wir fangen mit einer beliebigen zufälligen Belegung der Variablen an. Von allen unerfüllten Klauseln wird eine zufällig ausgewählt. Dann wird in der Klausel der Wert von einer der Variablen umgekehrt. Falls es noch unerfüllte Klauseln gibt, wiederholen wir den letzten Schritt bis wir eine erfüllende Belegung der Variablen gefunden haben.
Sei n die Anzahl der Variablen in der konjunktiven Normalform. Man kann sich die Arbeitsweise des Algorithmus durch einen Zeiger vorstellen, der auf einen der Werte in $\{0, 1, 2, ..., n\}$ zeigt. Der aktuelle Wert gibt an, wieviele

Variablen den richtigen Wert bezüglich einer speziellen Lösung haben. Wenn der Zeiger n erreicht, terminiert der Algorithmus. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Zeiger eine Position nach links bzw. nach rechts bewegt ist je $\frac{1}{2}$. Dieses Verhalten des Algorithmus könnte man mit einem Glücksspiel vergleichen. Ein Spieler geht mit n Dollar ins Casino und wettet um einen Dollar, wobei er mit Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ gewinnt. Unser Spieler ist ganz vernünftig und entscheidet sich die gewonnenen Dollar nicht wieder aufs Spiel zu setzen. So hat er in jedem Moment höchstens n Dollar. Wenn er alle n Dollar verloren hat, dann geht er. Es ist zu erwarten, dass sein Glück ihn irgendwann verlassen wird und er gehen muss. Die Frage ist nur nach wievielen Wetten.
Satz 1: *Die erwartete Anzahl von Schritten, um eine erfüllende Belegung zu finden, wenn eine überhaupt existiert, ist* $O(n^2)$.
Der Beweis des Satzes ist schwierig, deshalb verzichten wir darauf.

2 Markov-Ketten

Unter einer Irrfahrt kann man sich eine Reise auf einer Zustandsmenge vorstellen. Diese Zustandsmenge muss nicht unbedingt endlich sein, aber der Einfachheit halber arbeiten wir nur mit endlichen Mengen. Jeder Zustand hat eine Nachbarmenge von Zuständen, von der immer einen zufällig und gleichverteilt (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) gewählt wird. Jeder Schritt hängt nur vom aktuellen Zustand ab und es ist ohne Bedeutung auf welchem Weg wir diesen Zustand erreicht haben.
Das mathematische Modell der Markov-Ketten beschreibt solche Irrfahrten mit vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten für die Übergänge. Die einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten werden in einer Matrix P dargestellt. Dabei bezeichnet P_{ij} die Wahrscheinlichkeit von dem Zustand i in den Zustand j zu kommen. Für die Summe in jeder Zeile gilt: $\sum_j P_{ij} = 1$.
X_0 bezeichnet den Anfangszustand, X_i -den Zustand im i-ten Schritt. Es ist möglich, dass statt einem Anfangszustand auch eine Anfangsverteilung q^0 angegeben wird, die uns die Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen Anfangszustand angibt. $q^t = ({q_1}^t, {q_2}^t, ..., {q_n}^t)$ ist die Verteilung in einem beliebigem Zeitpunkt t.
Die Wahrscheinlichkeit aus dem Zustand i in den Zustand j nach genau t Schritten zu kommen sei:

$$r_{ij}^{(t)} = P[X_t = j \text{ und für alle } 1 \leq s \leq (t-1) : X_s \neq j | X_0 = i]$$

Die Wahrscheinlichkeit aus dem Zustand i den Zustand j in mehr als 0 Schritten zu einem beliebigen Zeitpunkt t zu erreichen sei:

$$f_{ij} = \sum_{t>0} {r_{ij}}^{(t)}$$

Die mathematische Erwartung für die benötigte Anzahl der Schritte für eine Irrfahrt von i nach j, wobei j zum ersten Mal besucht wird, sei:

$$h_{ij} = \sum_{t>0} tr_{ij}^{(t)}$$

Aus $f_{ij} < 1$ folgt $h_{ij} = \infty$ Ein Zustand i heisst *transistent*, falls $f_{ii} < 1$. Ein Zustand i heisst *persistent*, falls $f_{ii} = 1$. Für $h_{ii} = \infty$ *nullpersistent*, sonst ($h_{ii} < \infty$) *positiv-persistent.* Es sieht verwirrend aus, dass $f_{ii} < 1 \Rightarrow h_{ii} = \infty$. Der Beweis ist wirklich schwierig, da die Summen die gebildet werden recht komplex sind, aber eine nicht mathematische Begründung ist folgende: Wenn es eine bestimmte beliebig kleine, aber konstante Wahrscheinlichkeit gibt, dass wenn wir mit dem Zustand i starten den Zustand j nie erreichen (das besagt nämlich $f_{ij} < 1$), dann brauchen wir unendlich viele Schritte, um j irgendwann zu erreichen.
Eine *stationäre Verteilung* Π auf einer Markov-Kette mit Übergangsmatrix P ist eine Verteilung bei der sich nach der Ausführung eines Schrittes sich an der Markov-Kette nichts ändert : $\Pi P = \Pi$
Die *Periode eines Zustandes* i ist die grösste natürliche Zahl T, für die es eine natürliche Zahl a und eine Anfangsverteilung $q^{(0)}$ gibt, so dass für alle t gilt, dass wenn $q^{(a)} > 0$, dann ist $q^{(t)}$ ungleich null für alle $t \in \{a+Ti|i \geq 0\}$. Anders gesagt bestimmt die Periode eines Zustandes eine arithmetische Progression für den Zeitpunkt in dem sich dieser Zustand befinden kann. Eine andere Definition besagt, dass die Periode eines Zustandes i der grösste gemeinsame Teiler von allen Ordnungen n ist, für die ${P_{ii}}^n > 0$ gilt.
Ein Zustand heisst *periodisch* wenn seine Periode echt grösser als 1 und endlich ist, sonst ist der Zustand aperiodisch. Bei einer Markov-Kette, die von einem bipartiten Graph induziert wird, ist die Periode 2. (es ist sicher, dass wir nach zwei Schritten in den Zustand zurückkehren können, aber da der Graph bipartit ist, gibt es keinen Zyklus ungerader Länge).
Ein Zustand sei *ergodisch* , wenn er aperiodisch und positiv-persistent ist (also sicher erreichbar ist).

Hauptsatz über Markov-Ketten:

1. Alle Zustände sind ergodisch.
2. Es gibt eine stationäre Verteilung Π, so dass für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: $\Pi_i > 0$, wobei Π_i die stationäre Verteilung für den i-ten Zustand angibt.

3. Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: $f_{ii} = 1$, $h_{ii} = \frac{1}{\Pi_i}$
4. Sei $N(i,t)$ die Anzahl der Besuche des Zustandes i nach t Schritten. Es gilt:
$$lim_{t\to\infty} \frac{N(i,t)}{t} = \Pi_i$$

Der Beweis von dem Satz ist wirklich schwierig, aber für Interessierte ist in [2] im Kapitel 6 zu finden.

3 Irrfahrten auf Graphen

Sei $G = (V, E)$ stark zusammenhängender, nicht bipartiter ungerichteter Graph mit $|V| = n$ und $|E| = m$. Man kann eine Markov-Kette M_G auf dem Graph wie folgt definieren:

$$P_{uv} = \begin{cases} \frac{1}{d(u)} & (u,v) \in E \\ 0 & sonst \end{cases}$$

wo $d(w)$ der Grad einer Ecke w ist. Der Graph ist zusammenhängend, also ist jede Ecke bzw. Zustand erreichbar, deswegen ist die Markov-Kette unreduzierbar. Bei einem ungerichteten Graph gibt es Wege der Länge 2 von einem Zustand i und zurück. Der Graph ist aber nicht bipartit, also existieren Zyklen ungerader Länge. Daraus folgt, dass $ggT(t \in N | {P_{ii}}^t > 0)$ gleich 1 ist. Also ist die Markov-Kette aperiodisch und nach dem Hauptsatz über Markov-Ketten folgt, dass eine stationäre Verteilung existiert.

Lemma 1:
$$\forall v \in V : \Pi_v = \frac{d(v)}{2m}$$

Beweis:
$\Pi_v = \sum_u \Pi_u P_{uv} = P_{uv} = \sum_{(u,v)\in E} \frac{d(u)}{2m} \frac{1}{d(u)} = \sum_{(u,v)\in E} \frac{1}{2m} = \frac{d(v)}{2m}$ □

Lemma 2:
$$\forall v \in E : h_{vv} = \frac{1}{\Pi_v} = \frac{2m}{d(v)}$$

Beweis:
Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz über Markov-Ketten(3) und dem vorangehenden Lemma. □

Sei $C_{uv} = h_{uv} + h_{vu} = C_{vu}$ die erwartete Laufzeit für eine Irrfahrt, die

in u beginnt und endet nach mindestens einem Besuch von v. $C_u(G)$ sei die erwartete Laufzeit für eine Irrfahrt, die in u beginnt und endet, nachdem alle Ecken besucht worden sind. $C(G) = max_u C_u(G)$ heisst die *Überdeckungszeit* von G.
Beispiel:

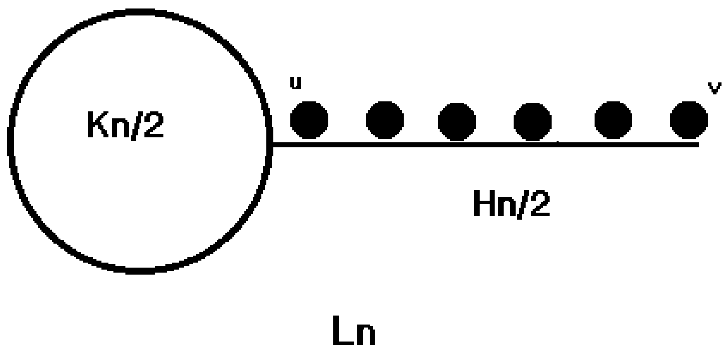

Abbildung 1: Lutscher Graph

Der Lutscher-Graph besteht zur Hälfte aus einem Kreis von miteinander verbundenen Ecken und einer Kette der restlichen Ecken, die an dem Kreis angehängt ist. Mit etwas Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man zeigen, dass $h_{uv} \in \Theta(n^3), h_{vu} \in \Theta(n^2)$. Es gilt im allgemeinen, dass $h_{uv} \neq h_{vu}$.

Lemma 3:
Die Überdeckungszeit ist nicht monoton in n.
Beweis: Es gilt $C(L_n) \in \Theta(n^3), C(H_n) \in \Theta(n^2), C(K_n) \in \Theta(nlogn)$. Man

kann einen Graph L_n aus einem Graph H_n und anderen Ecken konstruieren, L_n und andere Ecken kann man zu einem anderen Graph K_n umbauen. □

Lemma 4:
Für jede Kante $(u, v) \in E$ gilt: $C_{uv} = h_{uv} + h_{vu} \leq 2m$
Beweis: Um das Lemma zu beweisen betrachtet man eine neue Markov-Kette, die nicht auf den Ecken, sondern auf den Kanten des Graphen definiert wird. Die zuletzt durchquerte Kante von dem Graph zusammen mit ihrer Richtung sei der aktuelle Zustand der Markov-Kette. Es gibt m ungerichtete Kanten, also 2m gerichtete. Unsere Markov-Kette hat folglich 2m Zustände. Betrachten wir jetzt eine gerichtete Kante (v, w). Die Übergangsmatrix Q der oben beschriebenen Markov-Kette hat folgende Gestalt:

$$Q_{ux,vw} = \begin{cases} \frac{1}{d(v)} & \forall x = v \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Q ist doppelt stochastisch, d.h. dass die Spalten sich auch zu 1 summieren: $\sum_{i=1}^{n} Q_{ij} = 1 \forall j \in E$.
Sei Γ(x) die Menge aller Nachbarn von x.

$$\sum_{x \in E, y \in \Gamma(x)} Q_{(x,y),(v,w)} = \sum_{u \in \Gamma(v)} Q_{(u,v),(v,w)} = \sum_{u \in \Gamma(v)} P_{vw} = d(v) \frac{1}{d(v)} = 1$$

Diese Gleichverteilung ist auch eine stationäre Verteilung($\Pi_v = \frac{1}{2m}$). Nach dem Hauptsatz über Markov-Ketten folgt, dass die erwartete Zeit zwischen zwei Durchreisen der gerichteten Kante (u, v) kleiner gleich $2m$ ist. Betrachten wir jetzt $h_{uv} + h_{vu}$ als erwartete Zeit für eine Reise von u nach v und zurück. Nehmen wir an, dass die Ecke u über die Kante (u, v) betreten wurde, können wir folgern, dass die erwartete Zeit, um von der Ecke v nach u über (v, u) zu kommen, gleich $2m$ ist. Markov-Ketten sind aber gedächtnislos, also der nächste Zustand hängt nur vom aktuellen ab. Daraus folgt, dass es unwichtig ist, wie wir die Kante u erreicht haben und die Anfangsbedingung weglassen dürfen. Also ist $h_{uv} + h_{vu} = C_{uv} \leq 2m$ □

4 Elektrische Netzwerke

Elektrische Netzwerke haben enge Entsprechungen in Markov-Ketten und Irrfahrten. Ein elektrisches Netzwerk kann als ungerichteter Graph betrachtet werden. Jeder Kante ordnen wir einen Widerstand zu. Das Netz gehorcht

zwei Regeln:
Das Gesetz von Ohm: Für jeden Zweig gilt: $U = RI$, wobei U die Spannung, R der Widerstand und I die Stromstärke ist.
Das Gesetz von Kirchhof: Die Summe der Ströme ist an einem Knoten null.
Beispiel:

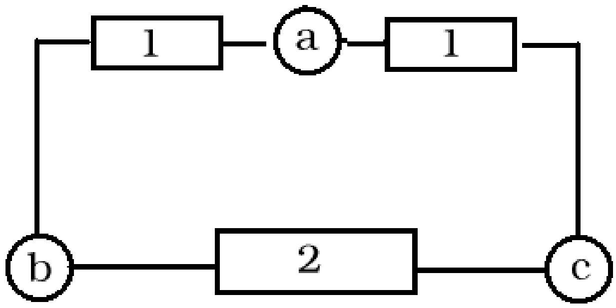

Abbildung 2: Elektrisches Netzwerk

Ein Strom von einem Ampere wird in den Knoten b eingesetzt und aus dem Knoten c abgezogen: $I_{bc} = \frac{1}{2}$ Ampere, $I_{ba} = I_{ac} = \frac{1}{2}$ Ampere, $U_{bc} = 1$ Volt, $U_{ac} = U_{ba} = \frac{1}{2}$ Volt.
Der *effektive Widerstand* zwischen zwei Knoten ist die Spannungsdifferenz zwischen den Knoten, wenn in den einen ein Strom von 1 Ampere gesetzt wird und im anderen wieder abgezogen wird. Der effektive Widerstand ist höchstens gleich dem Zweigwiderstand. Im Beispiel gilt: $R_{\text{eff},bc}$ =1 Volt, $R_{\text{Zweig}} = 2$ Ohm.

Auf jedem ungericheten Graph G lässt sich ein elektrisches Netzwerk $N(G)$ wie folgt definieren:

1. Jeder Ecke $v \in V$ wird ein Knoten im Netzwerk zugeordnet.
2. Für jede Kante $(u,v) \in E$ gibt es zwischen den entsprechenden Knoten in $N(G)$ 1 Ohm Spannung.
3. Für jede Kante $(u,v) \in E$ bezeichnet R_{uv} der effektive Widerstand zwischen den Knoten u und v

Satz 2: Für zwei Ecken u und v aus G gilt: $C_{uv} = 2mR_{uv}$.
Beweis:
Sei ϕ_{uv} die Spannung zwischen den Knoten u und v, wenn in jeden Knoten x $\in E$ $d(x)$ Ampere Strom eingesetzt werden und $2m$ Ampere im v abgezogen werden. $2m = \sum_{w \in E} d(w)$
Zuerst zeigen wir, dass für alle $u \in V$ gilt: $h_{uv} = \phi_{uv}$, wobei ϕ_{uv} die Spannung zwischen den Knoten u und v ist, wenn in jedem Knoten $x \in E$ $d(x)$ Ampere Strom eingespeist werden und $2m$ Ampere im Knoten v abgezogen werden. Nach dem Ohmschen und dem Kirchhofschen Gestz gilt für alle $u \in E \setminus \{v\}$:

$$d(u) = \sum_{w \in \Gamma(u)} \phi_{uv} - \phi_{wu}$$

Laut Definition vom Erwartungswert gilt für alle $u \in V \setminus \{v\}$:

$$h_{uv} = \sum_{w \in \Gamma(u)} \frac{1}{d(u)}(1 + h_{wu})$$

Die letzten zwei Gleichungen sind Lineare Gleichungssysteme mit jeweils einer Lösung. Diese sind identisch, falls wir ϕ_{uv} in der ersten durch h_{uv} in der zweiten ersetzen. Dann folgt:
$d(u) = \sum_{w \in \Gamma(u)} \phi_{uv} - \phi_{wu} \Rightarrow d(u)(1 - \phi_{uv}) = -\sum_{w \in \Gamma(u)} \phi_{wu} \Rightarrow \phi_{uv} = \sum_{w \in \Gamma(u)} \frac{1}{d(u)}(1 + \phi_{wu})$

Jetzt betrachten wir ϕ_{vu} und h_{uv} . ϕ_{vu} ist die Spannung zwischen den Knoten v und u, wenn in jedem Knoten $x \in V$ $d(x)$ Ampere Strom eingesetzt werden und $2m$ Ampere Strom in u abgezogen werden. Sei $\phi\prime_{vu}$ die Spannung zwischen den Knoten v und u, wenn der Strom von $2m$ Amperen in den Knoten u eingesetzt wird und von allen Knoten $x \in E$ $d(x)$ Ampere Strom abgezogen wird. Offenbar gilt: $\phi_{vu} = \phi\prime_{vu}$. Die Ströme von ϕ_{vu} und $\phi\prime_{vu}$ werden gleichzeitig eingesetzt und abgezogen.

Also ist $C_{uv} = \phi_{uv} + \phi_{vu} = \phi_{uv} + \phi\prime_{vu}$ □

Lemma 6:
In jedem Graph mit n Ecken gilt für alle Ecken u, v: $C_{uv} < n^3$
Beweis:
Der effektive Widerstand zwischen zwei Knoten u und v ist höchstens die Länge des kürzesten Weges zwischen ihnen. Für ungerichtete Graphen gilt: $2m \leq n^3$. Also können wir folgern, dass: $C_{uv} = 2mR_{uv} < n^2 n = n^3$. □

5 Überdeckungszeiten

Satz 3:
Für die Überdeckungszeit eines Graphen gilt: $C(G) \leq 2m(n-1)$

Beweis: Sei T ein spannender Baum des Graphen. Wir betrachten eine Irrfahrt durch den Baum T, die bei der Ecke v_0 beginnt und endet und die Ecken v_1,...,$v_k = v_0$ in dieser Reihenfolge besucht. Da alle Ecken besucht werden, ist eine obere Schranke für die erwartete Länge der Reise, eine obere Schranke für $C_{v_0}(G)$. $C_{v_0}(G) \leq \sum_{j=0}^{l-1} h_{v_j,v_{j+1}} = \sum_{(u,w)\in T} C_{uw}$
Für alle j gilt: $v_{j+1} \in \Gamma(v_j)$. Nach Lemma 6 folgt: $C_{v_j,v_{j+1}} \leq 2m$. Im Baum T gibt es aber $n-1$ Kanten, also gilt für die Überdeckungszeit des Graphen, wenn wir mit der Ecke v_0: $C_{v_0}(G) \leq 2m(n-1)$. Die Ecke v_0 kann aber beliebig gewählt werden, also gilt die Aussage. □

Es ist allerdings zu bemerken, dass die Ergebnisse, die der Satz liefert nicht ganz präzise sind. Betrachten wir nochmals das Beispiel des Lutscher-Graphen in Abbildung 2: Nach dem obigen Satz gilt $C(L_n) \in \Theta(n^3)$ und $C(K_n) \in \Theta(n^3)$. Wir haben aber gesehen, dass diese Behauptung nur für $C(L_n)$ asymptotisch richtig ist, da $C(K_n) \in \Theta(n \log n)$.

Sei der Widerstand des Graphen $R(G) = max_{u,v\in E} R_{uv}$.

Satz 4: $mR(G) \leq C(G) \leq 2e^3 mR(G) \ln n + n$
Beweis:
Die untere Schranke kann man wie folgt ermitteln:
Es existieren zwei Ecken u und v mit $R(G) = R_{uv}$. Es ist offensichtlich, dass $max(h_{uv}, h_{vu}) \geq \frac{C_{uv}}{2}$. Ferner gilt auch: $C(G) \geq max(h_{uv}, h_{vu}) \geq \frac{C_{uv}}{2} = mR_{uv} = R(G)$.
Für die obere Schranke kann man zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass

nach $2e^3 mR(G)\ln n$ Schritten nicht alle Ecken besucht wurden, höchstens $\frac{1}{n^2}$ beträgt. Für diesen Zweck benutzt man das Lemma: $\forall u, v \in E : C_{uv} < n^3$ und die Markov-Ungleichung: $Pr(Z \geq \epsilon) \leq \frac{E(f \circ Z)}{f(\epsilon)}$ für eine reelle ZV Z und eine monoton wachsende Funktion $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$. Nach dem Lemma würde folgen, dass $C(G) \leq 2e^3 mR(G)\ln n + n^3 \frac{1}{n^2}$. Die Irrfahrt könnte in $\ln n$ Teilreisen der Länge $2e^3 mR(G)$ eingeteilt werden. Für jede Ecke v ist $h_{uv} \leq 2mR(G)$. Jetzt wenden wir die Markov-Ungleichung an und erhalten die Wahrscheinlichkeit, dass die Ecke v in einer der $\ln n$ Reisen nicht besucht wurde:
$Pr[Y \geq 2e^3 mR(G)] = Pr[Y \geq e^3 E(Y)] \leq \frac{1}{e^3}$. Daraus können wir die Wahrscheinlichkeit folgern, dass die Ecke v in keiner der $\ln n$ Teilreisen besucht wurde, gleich $(\frac{1}{e^3})^{\ln n} = \frac{1}{n^3}$ ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ecke existiert, die in keiner der Teilreisen besucht wurde beträgt: $n\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Jetzt werde ich ohne Beweis einige Aussagen angeben, die aus der Theorie der elektrischen Netze folgen:
Das Rayleighsche Abkürzungsprinzip: Der effektive Widerstand steigt nicht durch das Verringern und fällt nicht durch das Erhöhen des Widerstandes an einer Kante. Der Widerstand fällt auch nicht beim Halbieren eines Knoten. (Jede betroffene Kante muss sich beim Halbieren für die eine Hälfte entscheiden.)

Lemma 7:
In einem Graph sei der Grad grösser gleich d. Es gilt: $R(G) \geq \frac{1}{d}$

Lemma 8:
Enthalte der Graph p Kanten-disjunkte Wege mit maximaler Länge l von s nach t. Dann gilt: $R_{st} \geq \frac{l}{p}$.

6 Zusammenhängende Graphen

In diesem Absatz werden einige grundlegende Graphenalgorithmen beschrieben, die auf Irrfahrten und Markov-Ketten basieren.

Das USTCON-Problem:
Das USTCON-Problem (undirected s-t connectivity) beschäftigt sich mit der Frage, ob zwei Ecken s und t eines Graphen in der selben starken Zusam-

menhangskomponente liegen. Mittels Tiefensuche ist das Problem in $O(m)$ Schritten lösbar, wobei m die Anzahl der Kanten ist. Es wird zusätzlicher Speicherplatz von $O(n)$ gebraucht, da der Algorithmus alle besuchten Ecken speichert.
Definition: Eine probalistische ln-SPACE Turingmaschine für eine Sprache L ist eine zufallsgesteuerte Turingmaschine, die O(ln n) Platz (und folglich $O(n^k)$ Zeit für eine Konstante k) braucht, um das Problem zu lösen.
Definition: Eine Sprache liegt in RLP, wenn es eine probabilistische ln-SPACE Turingmaschine M gibt, so dass für alle Eingaben x gilt:

$$Pr[M \text{ akzeptiert } x] = \begin{cases} \geq \frac{1}{2} & x \in E \\ 0 & sonst \end{cases}$$

SPACE $\in O(\ln n)$ gibt den benötigten Arbeitsspeicher an. Die Eingabe erfolgt über ein Band, von dem nur gelesen werden darf.

Satz 5: USTCON $\in$ RLP
Beweis:
Die Turingmaschine simuliert eine Irrfahrt der Länge $2n^3$ von s durch den Eingabegraph. Der Algorithmus gibt *Ja* aus, wenn die Ecke t erreicht wird, sonst *Nein*. So kann es aber zu einer fehlerhaften Ausgabe von *Nein* vorkommen. (Es ist nicht sicher, dass wir die Ecke t in $2n^3$ erreichen). Mit der Markov-Ungleichung können wir die Wahrscheinlichkeit für so eine fehlerhafte Ausgabe abschätzen: Nach Lemma gilt: $h_{st} \leq n^3$. Aus der Markov-Ungleichung folgt: $Pr[Y \geq 2n^3] = Pr[Y \geq 2E(Y)] \leq \frac{1}{2}$. Das beweist die Behauptung. □

Ein Beispiel für einen markierten Graph mit 3 Ecken sieht man unter Abbildung 3.
Alle Ecken haben den Grad 2.
Eine Sequenz $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_l)$ beschreibt mit einer Startecke eine Durchreise durch den Graph. In unserem Beispiel gilt: Startecke a und $\sigma = (1, 2, 1, 1, 2)$. Es werden die Ecken b, a, b, c, a in der angegebenen Reihenfolge besucht.
Eine Sequenz durchquert einen Graphen, wenn sie mit jeder Startecke alle Ecken besucht. Im Beispiel durchquert die Sequenz $\sigma = (1, 2, 2)$ den Graph.
Eine *Allgemeine Rundreise Sequenz* (universal traversal sequence) durchquert alle markierten Graphen für eine gegebene Klasse von markierten Graphen. Eine *Allgemeine Rundreise Sequenz* kann dazu verwendet werden, USTCON mit einer deterministischen $\ln - SPACE$ Turingmaschine zu lösen, wenn ihre Länge polynomiell zu n ist.

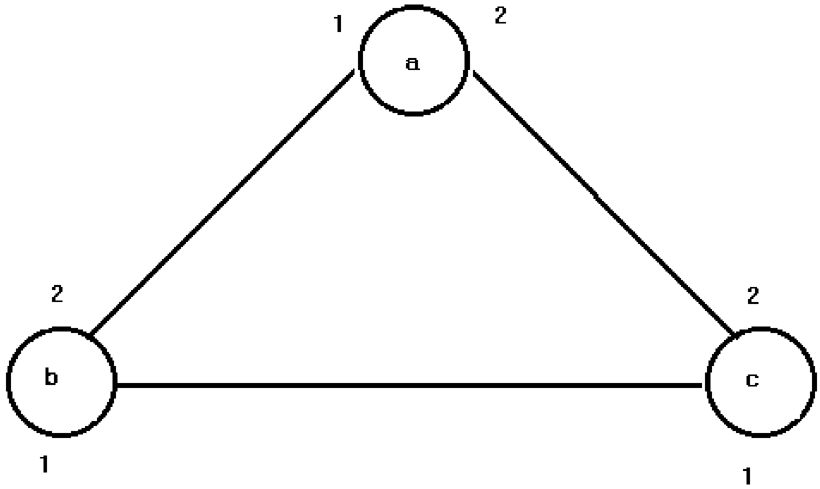

Abbildung 3: Markierter Graph

Literatur

[1] R. Motwani and P. Raghavan: Randomized Algorithms, Cambridge University Press

[2] Hans-Otto Georgii: Sochastik, Springer-Verlag (2002)

[3] Materilalien aus Internet ;-)