Sei φ = let rec f=fun n -> if n=1 then 1 else n+f(n- 1) in f 2

Behauptung: $\emptyset$, $\varphi \rightarrow$ 3

Beweis:

1) $\emptyset$, let rec f = fun n -> if n=1 then 1 else f(n- 1) in f 2 $\rightarrow$ 3
wegen2) (Regel f. let rec)
2) U_0, f 2 $\rightarrow$ 3
wegen3),4),5) (Regel f. Funktionsapplikation)
3) U_0, 2 $\rightarrow$ 2
4) U_0, f $\rightarrow$ (fun n -> if n=1 then 1 else n+f(n- 1),$\emptyset$)
5) U_1 , if n=1 then 1 else n+f(n- 1) $\rightarrow$ 3
wegen 6),7) (Regel f. if)
6) U_1 , n=1 $\rightarrow$ false
wegen 10),11) (Regel f. =)
7) U_1 , n+f(n- 1) $\rightarrow$ 3
wegen 10),8) (Regel f. +)
8) U_1 , f(n- 1) $\rightarrow$ 1
wegen 9),12),13) (Regel f. rekursive Funktionsapplikation)
9) U_1 , n- 1 $\rightarrow$ 1
wegen10),11) (Regel f. -)
10) U_1 , n $\rightarrow$ 2
11) U_1 , 1 $\rightarrow$ 1
12) U_1 , f $\rightarrow$ (fun f = if n=1 then 1 else n+f(n- 1),$\emptyset$)
13) U_2 , if n=1 then 1 else n+f(n- 1) $\rightarrow$ 1
wegen 14),15) (Regel f. if)
14) U_2 , n=1 $\rightarrow$ true
wegen 16),15) (Regel f. =)
15) U_2 , 1 $\rightarrow$ 1
16) U_2 , n $\rightarrow$ 1

wobei
U_0 = {<f,(f=fun n -> if n=1 then 1 else n+f(n- 1),$\emptyset$>}
$U_1 = U_0 \cup$ {<n,2>}
$U_2 = U_0 \cup$ {<n,1>} = U_1 + {<n,1>}