Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. M. Hofmann
Dr. J. Johannsen, Dr. M. Lange

WS 03/04

Übungen zur Vorlesung
Informatik I

Musterlösungen zu Blatt 2

Lösung zu Aufgabe S-9:
"Wenn A, dann B" $\equiv \neg A \vee B$, "nur wenn A, dann B" $\equiv$ "wenn B, dann A", "A genau dann, wenn B" $\equiv$ "wenn A dann B" $\wedge$ "nur wenn A, dann B".

a) $(x < y \vee y < x) \wedge \neg(x < y \wedge y < x)$

b) $\neg(x = y \wedge y = z) \vee (x = z)$

c) $(\neg(x < y) \vee \neg(y < x)) \wedge (y < x \vee x < y)$

d) $\neg(x * y < x + y) \vee x = 0 \vee x = 1 \vee y = 0 \vee y = 1$

e) $(\neg(y < z) \vee x = y) \wedge (\neg(z < y) \vee x = z) \wedge (x = y \vee x = z)$

Im ersten Fall hängt der Wert des Terms davon ab, ob $x = y$ ist, genauso im dritten. Im fünften Fall hängt der Wert des Terms von den Werten von x, y und z ab. In den anderen Fällen hängt der Wert des Terms von nichts ab, denn er ist immer *true*. Solche Formeln nennt man auch *Tautologien*.

Lösung zu Aufgabe S-10:

a) frei: $\{g, y\}$, gebunden: $\{f, x\}$

b) frei: $\emptyset$, gebunden: $\{x, y\}$

c) frei: $\{z\}$, gebunden: $\{f, g, y, x\}$

d) frei: $\{f, z, g\}$, gebunden: $\{x, y, z\}$

Lösung zu Aufgabe S-11:
Durch Einsetzen von konkreten Werten für y erhält man die Vermutung: $f(x, y) = x + 2^y$. Dies beweisen wir durch Induktion über y.

Induktionsanfang: Sei $y = 0$. Dies entspricht der *then*-Klausel in der Funktion f. Also $f(x, 0) = x+1 = x + 2^0$. Damit ist die Behauptung für den Basisfall bewiesen.

Induktionsschritt: Sei $y > 0$. Nehmen wir an, dass die Induktionshypothese für alle kleineren Werte als y gilt, d.h. $f(x, y') = x + 2^{y'}$ falls $y' < y$. Betrachten wir nun, was die Funktion an der Stelle x, y macht. Dies entspricht wegen der Annahme $y > 0$ der *else*-Klausel. Also

$$f(x, y) = f(f(x, y-1), y-1) = f(x + 2^{y-1}, y-1) = x + 2^{y-1} + 2^{y-1} = x + 2 \cdot 2^{y-1} = x + 2^y$$

wobei bei dem zweiten und dritten Gleichheitszeichen jeweils die Induktionshypothese für $y - 1$, was offensichtlich kleiner als y ist, angewandt wurde.

Mithilfe des Induktionsprinzips für natürliche Zahlen gilt also: $\forall y \in \mathbb{N} : f(x, y) = x + 2^y$. Da in obigem Beweis keine Annahme über x gemacht wurde, gilt sogar $\forall x, y \in \mathbb{N} : f(x, y) = x + 2^y$.

Lösung zu Aufgabe S-12:

prefix = **function**(w: *Wort*, v: *Wort*) *Bool*

pre $w = w_1 \dots w_n, v = v_1 \dots v_m$

begin

if $m > n$ **then** *false*

else if $m = 0$ **then** *true*

else if $v_1 \neq w_1$ **then** *false*

else let $w' = w_2 \dots w_n, v' = v_2 \dots v_m$ **in** prefix(w', v')

end

Sei nun eine Ordung auf Paaren von Wörtern folgendermassen definiert: $(w, v) < (w', v')$ gdw. $|v| < |v'|$, wobei $| \cdot |$ die syntaktische Länge eines Wortes, sprich die Anzahl seiner Symbole, bezeichnet.

Eine Abstiegsfunktion für den Algorithmus “prefix” ist dann z.B. $\Phi(w, v) = |v|$. Erstens gilt, dass “prefix” terminiert, falls die Abstiegsfunktion auf den Argumenten minimal, sprich 0, ist. Zweitens gilt, dass bei jedem rekursiven Aufruf der Φ-Wert der Argumente geringer wird.