Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. M. Hofmann
Dr. J. Johannsen, Dr. M. Lange

WS 03/04

Übungen zur Vorlesung
Informatik I

Musterlösungen zu Blatt 3

Lösung zu Aufgabe S-13:
Angenommen, wir schreiben eine Funktion *vollkommen:* $\mathbb{N} \to bool$, die von einer natürlichen Zahl n entschieden soll, ob diese vollkommen ist. Dann wird diese Funktion nicht darum herumkommen, einen Teiler t von n zu wählen, um das Problem auf ein kleineres zu reduzieren. Dann gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten für einen rekursiven Aufruf.

1. Es wird *vollkommen*$(n - t)$ aufgerufen. Aus den Teilern von $n - t$ läßt sich jedoch nicht mehr auf die Teiler von n schließen.
2. Es wird *vollkommen*(n/t) aufgerufen. Dann kann man Teiler übersehen, z.B. wenn t keine Primzahl ist. Umgekehrt, falls t immer prim ist, dann übersieht man solche Teiler, die nicht prim sind.

Um diese Probleme zu umgehen, betten wir das Problem in ein generelleres ein: das Berechnen der Summe aller Teiler von n, die größer als 1 aber kleiner gleich i sind.

$teiler\_summe$ = **function**$(n, i$: **nat**) **nat**
  if $i = 1$ **then** 0
    else if $n \mod i = 0$ **then** $i + teiler\_summe(n, i - 1)$
      else $teiler\_summe(n, i - 1)$

Dann läßt sich folgendermaßen bestimmt, ob n vollkommen ist:

$vollkommen$ = **function**$(n$: **nat**) **bool**
  $teiler\_summe(n, n - 1) = n - 1$

Lösung zu Aufgabe S-14:

a) $m(1) = 2^{\lceil \log_2(1) \rceil + 1} - 1 = 2^{0+1} - 1 = 1$. Sei nun $n > 1$. Dann ist $\lceil \log_2(n) \rceil + 1 \geq 2$. Ausserdem gilt für alle $n \geq 1$, dass $2^{\lceil \log_2(n) \rceil + 1}$ die zu n nächstgrößere Zweierpotenz ist. Und für $n > 1$ ist diese immer größer als $n + 1$.

b) Es gibt zwei verschiedene rekursive Aufrufe innerhalb der Definition von $f(n)$. Sei zuerst $n = 2^{n'}$ für ein $n' \geq 1$. Dann wird f mit Argument n' aufgerufen. Es gilt

$$m(n) = 2^{\lceil \log_2(n) \rceil + 1} - n = 2^{\lceil \log_2(2^{n'}) \rceil + 1} - 2^{n'} = 2^{n'+1} - 2^{n'} = 2^{n'} > 2^{\lceil \log_2(n') \rceil + 1} - n' = m(n')$$

Ist n keine Zweierpotenz, dann wird f mit Argument $n' = n + 1$ aufgerufen. Es gilt

$$m(n') = 2^{\lceil \log_2(n') \rceil + 1} - n' = 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil + 1} - n - 1 \leq 2^{\lceil \log_2(n) \rceil + 1} - n - 1 < 2^{\lceil \log_2(n) \rceil + 1} - n = m(n)$$

wobei die erste Abschätzung die Tatsache benutzt, dass n keine Zweierpotenz ist.

Lösung zu Aufgabe S-15:
Wir definieren als Abstiegsfunktion $M(n,m) = |n-m|$ für f. Erstens terminiert der Aufruf von $f(n,m)$, falls $M(n,m)$ minimal, d.h. 0 ist. Zweitens ist zu zeigen, dass die M-Werte an Stellen (n',m') kleiner sind als der M-Wert von (n,m), falls $f(n,m)$ über $f(n',m')$ definiert ist. Das geschieht an zwei Stellen. Es gelten

$$M(n, \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor) = |n - \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor| < |n-m| = M(n,m)$$

und

$$M(\left\lceil \frac{n+m}{2} \right\rceil, m) = |\left\lceil \frac{n+m}{2} \right\rceil - m| < |n-m| = M(n,m)$$

da das arithmetische Mittel von n und m immer näher an n liegt als m dies tut und umgekehrt. Durch das Auf- und Abrunden können Randfälle auftreten, d.h. in den obigen Ungleichungen könnte prinzipiell doch Gleichheit gelten. Dies kann aber nur zu Problemen führen, falls der Abstand von n und m gleich 1 ist. Sei z.B. $m = n+1$. Dann gilt

$$M(n, \left\lfloor \frac{2 \cdot n+1}{2} \right\rfloor) = |n - \left\lfloor n + \frac{1}{2} \right\rfloor| = 0 < 1 = |n-n-1| = M(n,m)$$

und

$$M(\left\lceil \frac{2 \cdot n+1}{2} \right\rceil, n+1) = |\left\lceil n + \frac{1}{2} \right\rceil - n - 1| = 0 < 1 = |n-n-1| = M(n,m)$$

und analog für $n = m+1$.

Lösung zu Aufgabe S-16:

a) $(\mathbf{nat} \to \alpha) \to \alpha$

b) $(\alpha \to \beta) \times \alpha \to \beta$

c) $(\mathbf{nat} \to \mathbf{nat}) \times \mathbf{nat} \to \mathbf{nat}$

d) $(\mathbf{nat} \times \alpha \to \mathbf{nat} \times \alpha) \times \mathbf{nat} \times \alpha \to \mathbf{nat} \times \alpha$

wobei $\times$ stärker bindet als $\to$.