

Universität München

Institut für Informatik

Wintersemester 2004/05

Dozenten: Dr. Martin Lange

Dr. Ralph Mattes

Hauptseminar: Fixpunkte

Fixpunkte:

Boolesche Gleichungssysteme

vorgelegt von:

Johann Limmer

Gliederung

A. Einleitung

Seite 3

B.

I. Grundlagen

Seite 4

1) Partielle Ordnung, Supremum und Infimum

Seite 4

2) Fixpunkte

Seite 5

3) Fixpunktgleichungssysteme

Seite 6

II. Boolesche Gleichungssysteme

Seite 7

1) Grundlagen

Seite 7

2) Einfache Form und Normalform

Seite 9

3) Blöcke

Seite 10

4) Reduktion eines booleschen Gleichungssystems unter
Beibehaltung der Lösung

Seite 12

III. Lösen von booleschen Gleichungssystemen

Seite 13

1) Approximation

Seite 13

2) Tableaux

Seite 14

3) Gauß Elimination

Seite 15

C. Schluss

Seite 18

D. Bibliographie

Seite 18

A. Einleitung

Fixpunkte und Fixpunktgleichungssysteme, speziell Boolesche Gleichungssysteme, spielen eine bedeutende Rolle in der Informatik. Aus diesem Anlass sollen in dieser Arbeit die mathematischen Grundlagen vorgestellt werden.

Doch zunächst noch einige einführende Beispiele. Immer wieder hat man in der Informatik mit beschrifteten Transitionsystemen zu tun (z.B. Zustände und Zustandsübergänge von Automaten). Diese können mit Hilfe des modalen μ -Kalküls beschrieben werden. Betrachtet man nun ein gegebenes Modell und eine Formel des μ -Kalküls, so stellt sich einem die Frage, ob vom Anfangszustand aus, das Transitionsystem die Formel erfüllt. Man kann sich nun eine Transformationsfunktion E definieren, die ein Paar $(\Phi, \mathcal{M})$ nimmt, wobei Φ eine Formel des modalen μ -Kalküls ist und $\mathcal{M}$ ein Modell, und dies auf ein Boolesches Gleichungssystem abbildet. Diese Funktion E existiert und somit entspricht das "model checking problem" dem Lösen eines Booleschen Gleichungssystems.

Ein anderes Beispiel kommt aus dem Bereich der Hardware. Schaltnetze lassen sich ebenfalls durch boolesche Gleichungssysteme beschreiben.

B.

I. Grundlagen

In diesem Abschnitt werden allgemeine Grundlagen kurz vorgestellt, Fixpunkte und Fixpunktgleichungssysteme definiert. Hierbei handelt es sich um allgemeingültige Aussagen. Mathematische Begriffe, die im Text nicht näher erläutert werden, werden als bekannt vorausgesetzt und nur kurz in einer Fußnote wiederholt.

1) Partielle Ordnung, Supremum und Infimum:

Definition I.1.1:

Eine Relation $\leq$ auf eine Menge A nennt man **partielle Ordnung**, wenn für alle Elemente $x, y \in A$ gilt:

- | | | |
|----|--|-------------------|
| 1) | $x \leq x$ | (reflexiv) |
| 2) | $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$ | (antisymmetrisch) |
| 3) | $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ | (transitiv) |

Man bezeichnet eine Menge mit einer partiellen Ordnung als **geordnete Menge**.

Folgerung I.1.2:

Ist A eine geordnete Menge so ist auch jede Teilmenge $X \subseteq A$ eine geordnete Menge und das größte Element von X ist $g \in X$, wenn gilt $g \geq x$ für alle $x \in X$. Analog existiert das kleinste Element $k \in X$, wenn gilt $k \leq x$ für alle $x \in X$.

Definition I.1.3:

Sei nun $B \subseteq A$. Dann gibt es ein "obere Schranke" $o \in B$ mit $b \leq o$ für alle $b \in B$ und analog eine "untere Schranke" $u \in B$ mit $u \leq b$ für alle $b \in B$. Die "oberen Schranken" aller $B \subseteq A$ werden in $\uparrow B$ gesammelt und die "unteren Schranken" in $\downarrow B$.

Das kleinste Element von $\uparrow B$, falls es existiert, bezeichnet man als **Supremum** und das größte Element von $\downarrow B$ als **Infimum**.

Notation:

Im folgenden wird das **Supremum** einer Menge $\{x, y\}$ als $x \vee y$ und das **Infimum** als $x \wedge y$ bezeichnet.

Defintion I.1.4 (Verband):

Ein Verband ist ein Paar $(A, \leq)$, so dass $\forall x, y \in A$ gilt:

$$x \vee y, x \wedge y \in A.$$

Definition I.1.5 (vollständiger Verband):

Ein Verband $(A, \leq)$ heisst vollständig, falls

$$\forall X \subseteq A: \vee X, \wedge X \in A.$$

2) Fixpunkte:

Wie bereits angekündigt, folgt nun die Definition von Fixpunkten über Verbänden. Im folgenden Abschnitt wird die Kenntnis von monotonen Funktionen¹ vorausgesetzt.

Definition I.2.1:

Sei $(A, \leq)$ ein vollständiger Verband und $f : A \rightarrow A$ eine Funktion. Ein $a \in A$ ist ein **Fixpunkt**, falls gilt $f(a) = a$.

Satz I.2.2 (Knaster-Tarski)²:

Sei $(A, \leq)$ ein vollständiger Verband, $f : A \rightarrow A$ eine monotone Funktion und P die Menge aller Fixpunkte von f .

1) P ist nicht leer und vollständig.

2) der **kleinste Fixpunkt**: $\mu X. f(x) = \text{Supremum}\{a \in A \mid f(x) \leq a\}$

3) der **größte Fixpunkt**: $\nu X. f(x) = \text{Infimum}\{a \in A \mid f(a) \geq a\}$

¹ zur Erinnerung: Sei f eine Funktion. Falls $x \leq y$ gilt, dann muss auch $f(x) \leq f(y)$ gelten.

² A. Tarski, A Lattice-theoretical Fixpoint Theorem and its Application. Pacific J.Math. 1955. Band 5. S. 285-309

σ wird verwendet, wenn entweder μ oder ν gemeint ist.

Um nun auch eingebettete Fixpunkte definieren zu können, muss nun zuerst noch eine Ordnung auf Funktionenräumen festgelegt werden. Dies geschieht durch das folgende Lemma.

Lemma I.2.3:

Sei $(B, \leq)$ ein Verband, A eine Menge, dann ist auch $(A \rightarrow B, \subseteq)$ ein Verband mit $f \subseteq g$, falls $\forall x \in A: f(x) \leq g(x)$

Beweis:

Um zu zeigen, dass $(A \rightarrow B, \subseteq)$ ein Verband ist, muss man zeigen, dass für jeweils 2 Elemente von " $A \rightarrow B$ " sowohl Infimum, als auch Supremum (vgl. Def I.1.4) existieren. Da aber nun gilt: $\forall x \in A: f(x) \leq g(x)$ folgt die Behauptung.

Definition I.2.4 (eingebettete Fixpunkte):

Seien $(A, \leq)$ und $(B, \leq)$ vollständig Verbände und $g: A \times B \rightarrow B$ eine monotone Funktion. Dann sind der **kleinste Fixpunkt** und der **größte Fixpunkt in bezug auf B** eine Funktion von A nach B .

Speziell:

1) der **kleinste Fixpunkt**:

$$\mu Y. g(X, Y) = \text{Infimum}\{g' \in (A \rightarrow B) \mid g(X, g'(X)) \leq g'(X)\}$$

2) der **größte Fixpunkt**:

$$\nu Y. g(X, Y) = \text{Supremum}\{g' \in (A \rightarrow B) \mid g(X, g'(x)) \geq g'(X)\}$$

3) Fixpunktgleichungssysteme:

Definition I.3.1 (Fixpunktgleichungssystem):

Ein **Fixpunktgleichungssystem** $\mathcal{E}$ über einer nach Definition 1.4 vollständige Menge A ist eine endliche Folge von Gleichungen der Form $(\sigma X = f)$ wobei $f: A^n \rightarrow A$ mit $n \in \mathbb{N}$ ³ eine monotone Funktion ist. Die **leere Sequenz** wird mit ε bezeichnet.

³ $\mathbb{N}$ bezeichnet hier die Menge der natürlichen Zahlen.

Definition I.3.2:

Sei $\mathcal{E}$ ein Fixpunktgleichungssystem. Dann gilt:

1) Die Menge der Variablen auf der **linken Seite** ist:

$$\bullet \quad \text{lhs}((\sigma X = f) \mathcal{E}) = \{X\} \cup \text{lhs}(\mathcal{E})$$

2) Die Menge Variablen auf der **rechten Seite** ist:

$$\text{rhs}((\sigma X = f) \mathcal{E}) = \{f\} \cup \text{rhs}(\mathcal{E})$$

3) Die Menge der **gebunden Variablen** ist:

$$\text{bound}(\mathcal{E}) = \text{lhs}(\mathcal{E}) \cap \text{rhs}(\mathcal{E})$$

4) Die Menge der **freien Variablen** ist:

$$\text{free}(\mathcal{E}) = \text{rhs}(\mathcal{E}) \setminus \text{lhs}(\mathcal{E})$$

Wie man in Punkt 3) von Bemerkung I.3.2 sieht, ist es möglich dass Variablen gebunden sind. Diese können in mehreren Gleichungen des Fixpunktgleichungssystem gebunden sein. Anstatt jetzt jedesmal den Wert einer gebundenen Variable zu substituieren, bietet es sich an, diese Werte in einer sog. **Umgebung θ** zu sammeln.

Definition I.3.3 (Umgebung):

Eine Umgebung ist eine Funktion $\theta: X \rightarrow A$, die einer Variable einen Wert zuordnet.

1) Anwendung einer Funktion auf eine Umgebung $f(\theta)$ liefert als Ergebnis die Funktion f in der jede freie Variable an einen Wert aus der Umgebung gebunden wird.

2) $\theta[X/a]$ beschreibt eine Umgebung in der jede Variable, außer X , an einen Wert aus θ gebunden werden $(\theta[X/a])(Y) = Y$, falls Y und X **nicht** äquivalent sind. X selbst erhält den Wert a (formell: $(\theta[X/a])(X) = a$)

II. Boolesche Gleichungssysteme

Bei den booleschen Gleichungssystemen handelt es sich um einen Spezialfall der Fixpunktgleichungssysteme, denen die **Boolesche Menge** $\mathcal{B} = \{true, false\}$ zugrunde liegt.

1) Grundlagen:

Zunächst folgt eine Definition der booleschen Gleichungssysteme, analog der Definition I.3.1

Definition II.1.1 (Boolesche Gleichungssysteme):

Sei $\mathcal{B}^+(x)$ die Menge der Negationsfreien booleschen Ausdrücke über einer zählbaren Menge von Variablen x .

Eine boolesche Gleichung hat die Form $\sigma X = f$, mit $\sigma \in \{\mu, \nu\}$, X ist eine boolesche Variable $X \in x$ und $f \in \mathcal{B}^+(x)$.

Ein boolesches Gleichungssystem ist eine Folge von booleschen Gleichungen. Die leere Folge wird mit ε bezeichnet.

Falls $\sigma X = f$ eine boolesche Gleichung und $\mathcal{E}$ ein boolesches Gleichungssystem ist, so ist auch $(\sigma X = f) \mathcal{E}$ ein boolesches Gleichungssystem.

Es gilt die Ordnung $\text{false} \leq \text{true}$.

Anstatt die kleinsten/größten Fixpunkte einer booleschen Funktion punktweise auszuwerten, ist es nun möglich diese als eine Funktion selbst zu repräsentieren. Die folgenden 2 Lemmata zeigen das.

Lemma II.1.2:

Sei $f(X)$ eine monotone boolesche Funktion über der Variablen X . Dann gilt:

$$\mu X. f(X) = f(\text{false})$$

Beweis:

Zwei Fälle.

$$1) \mu X. f(X) = \text{false} \Rightarrow f(\text{false}) = \text{false}$$

$$2) \mu X. f(X) = \text{true} \Rightarrow f(\text{false}) = \text{true}$$

somit gilt: $\mu X. f(X) = f(\text{false})$

Lemma II.1.3:

Sei $f(X_1, \dots, X_n)$ eine monotone boolesche Funktion von $\mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$. Dann gilt:

$$1) \text{ kleinster Fixpunkt in Abhängigkeit von } X_1: \mu X_1. f(X_1, \dots, X_n) = f(\text{false}, X_2, \dots, X_n)$$

$$2) \text{ größter Fixpunkt in Abhängigkeit von } X_1: \nu X_1. f(X_1, \dots, X_n) = f(\text{true}, X_2, \dots, X_n)$$

Beweis:

folgt direkt aus Lemma II.1.2 (Spezialfall von Lemma II.1.2)

Definition II.1.4:

Sei $\mathcal{E}$ ein boolesches Gleichungssystem, $\sigma X = f$ eine boolesche Gleichung, θ eine Umgebung und $b_\mu = false$ und $b_\nu = true$. Dann lässt sich die Lösung eines booleschen Gleichungssystems wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} [\mathcal{E}]\theta &= \theta \\ [(\sigma X = f)\mathcal{E}]\theta &= [\mathcal{E}]\theta[X/f([\mathcal{E}]\theta[X/b_\sigma])] \end{aligned}$$

Definition II.1.5:

Die **Länge eines booleschen Gleichungssystems** $\mathcal{E}$ ist definiert als:

$$\begin{aligned} [\mathcal{E}] &= 0 \\ [(\sigma X = f)\mathcal{E}] &= 1 + |f| + |\mathcal{E}| \end{aligned}$$

mit $|f|$ = die Anzahl der Variablen und Konstanten in f .

2) Einfache Form und Normalform:**Definition II.2.1:**

Ein boolesches Gleichungssystem befindet sich in **einfacher Form**, falls jede rechte Seite eine Gleichung entweder aus genau einer Konjunktion, Disjunktion, einer einzelnen Variablen oder einer Konstanten besteht.

Definition II.2.2 (Normalform):

Ein boolesches Gleichungssystem befindet sich in **Normalform**, falls folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- 1) $lhs(\mathcal{E}) = \{X_1, \dots, X_n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$
- 2) wenn $X_i \triangleleft X_j$ dann ist $i < j$
- 3) die rechte Seite jeder Gleichung besteht entweder aus einer Disjunktion $X_i \vee X_j$, einer Konjunktion $X_i \wedge X_j$, einer einzelnen Variablen X_i oder einer Konstante *true* oder *false*.

Lemma II.2.3:

- $$\begin{aligned}
1) \quad & ([(\sigma X = f_1 \wedge f_2)_{\mathcal{E}}]\theta) &= & ([(\sigma X = f_1 \wedge X')(\sigma' X' = f_2)_{\mathcal{E}}]\theta) \\
2) \quad & ([(\sigma X = f_1 \vee f_2)_{\mathcal{E}}]\theta) &= & ([(\sigma X = f_1 \vee X')(\sigma' X' = f_2)_{\mathcal{E}}]\theta)
\end{aligned}$$

mit einer neuen Variablen X' , die weder in der rechten Seite von $\mathcal{E}$, noch in f_1 oder f_2 auftritt und einem beliebigen Fixpunktoperator σ'

Beweis:

- 1) Der Fixpunkt σX in dem Gleichungssystem $[(\sigma X = f_1 \wedge X')(\sigma' X' = f_2)_{\mathcal{E}}]$ wird durch den Ausdruck $f_1 \wedge X'$ bestimmt. X' entspricht aber genau f_2 und somit gilt $\sigma X = f_1 \wedge X' = f_1 \wedge f_2$; also gilt somit insgesamt für das Gleichungssystem die Behauptung.
- 2) analog 1)

Satz II.2.4:

Zu jedem booleschen Gleichungssystem $\mathcal{E}$ gibt es ein boolesches Gleichungssystem $\mathcal{E}'$ in Normalform und eine Umbenennungsfunktion λ , so dass gilt:

$$([\mathcal{E}]\theta)(X) = ([\mathcal{E}']\theta)(\lambda(X))$$

Beweis:

Anwendung von Lemma II.2.3.

3) Blöcke:

Betrachtet man noch einmal die Definition eines booleschen Gleichungssystems, so besteht dies aus einer Folge von Gleichungen. Es ist nun möglich, dass mehrere aufeinander folgende Gleichungen, den selben Fixpunktoperator besitzen. Diese Gleichungen lassen sich dann zu einem **Block** zusammenfassen. Offensichtlich ist der kleinste Block eines booleschen Gleichungssystems eine Gleichung und der Größte das Gleichungssystem an sich.

Doch nun zur formellen Definition und weiteren interessanten Aussagen bezgl. Blöcken.

Definition II.3.1:

Sei $\mathcal{E}$ ein boolesches Gleichungssystem. $\mathcal{E}$ lässt sich nun in Teilgleichungssysteme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_n$ zerlegen, mit $\mathcal{E}_i = (\sigma_i X_{i,1} = f_{i,1}) \dots (\sigma_i X_{i,k} = f_{i,k})$. Ein solches Teilgleichungssystem $\mathcal{E}_i$ nennt man einen **Block**.

Definition II.3.2 (aktive Variablen):

Sei $\mathcal{E}$ ein boolesches Gleichungssystem. Seien $\sigma_X X = f_X$ und $\sigma_Y Y = f_Y$ Gleichungen von $\mathcal{E}$, mit $\sigma_X X = f_X \triangleleft \sigma_Y Y = f_Y$, dann ist X **aktiv** in $\sigma_Y Y = f_Y$, falls

- 1) X ist ungebunden in $\sigma_Y Y = f_Y$
- 2) eine Variable Z ist ungebunden in $\sigma_Y Y = f_Y$, $X \triangleleft Z \triangleleft Y$ und X ist aktiv in $\sigma_Z Z = f_Z$

Definition II.3.3:

- 1) Eine Variable X ist aktiv in einem Block $\mathcal{E}_j$, wenn sie in einer Gleichung von $\mathcal{E}_j$ aktiv ist.
- 2) Ein Block $\mathcal{E}_i$ ist aktiv in einem Block $\mathcal{E}_j$, wenn eine Variable X einer Gleichung $\sigma_X X = f_X$ von $\mathcal{E}_i$ in $\mathcal{E}_j$ aktiv ist

Die Frage die sich einen nun stellt, ist, wie sieht es bezüglich der minimalen Anzahl von Blöcken eines booleschen Gleichungssystems aus. Wie man gleich sehen wird, ist es möglich, unter bestimmten Voraussetzungen, boolesche Gleichungen zu vertauschen. Hierzu benötigt man das folgende Lemma.

Lemma II.3.4:

Seien X_1 nicht frei in f_2 und X_2 nicht frei in f_1 . Ferner seien θ_1 und θ_2 gegeben als:

$$\theta_1 = [\mathcal{E}_1(\sigma_1 X_1 = f_1)(\sigma_2 X_2 = f_2)\mathcal{E}_2]\theta$$

$$\theta_2 = [\mathcal{E}_1(\sigma_2 X_2 = f_2)(\sigma_1 X_1 = f_1)\mathcal{E}_2]\theta$$

Dann gilt $\theta_1 = \theta_2$.

Beweis:

direkt. Ein Vergleich beider Umgebungen θ_1 und θ_2 zeigt die Gleichheit beider.

Definition II.3.5 (Einbettungstiefe):

Die **minimale Anzahl von Blöcken** eines booleschen Gleichungssystems erhält man, indem man wiederholt Gleichungen unter Anwendung von Lemma II.3.4 vertauscht. Das Ergebnis bezeichnet man als **Einbettungstiefe eines booleschen Gleichungssystems**.

Zum Abschluss dieses Unterpunktes bleibt noch die Frage zu klären, wie es denn bezgl. der **Alternierungstiefe** aussieht. Diese wird bestimmt in dem gezählt wird, wie oft sich der Fixpunktoperator aufeinander folgender Gleichungen ändert.

Definition II.3.6 (Alternierungstiefe):

Sei $\mathcal{E}$ ein boolesches Gleichungssystem. Sei $\sigma_1 X_1 = f_1 \triangleleft \dots \triangleleft \sigma_n X_n = f_n$ eine Kette von booleschen Gleichungen maximaler Länge, so dass für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt:

- 1) X_i ist aktiv in $\sigma_{i+1} X_{i+1} = f_{i+1}$
- 2) X_n ist frei in f_n
- 3) $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$

Dann hat $\mathcal{E}$ die Alternierungstiefe n .

Man schreibt: $ad(\mathcal{E})=n$.

4) Reduktion eines booleschen Gleichungssystems unter Beibehaltung der Lösung:

Es kann nun sein, dass zwei Gleichungen eines booleschen Gleichungssystems die selbe *rhs* besitzen. Zum Beispiel: $\sigma X = f$ und $\sigma Y = f$. Es wäre nun wünschenswert, wenn man eine Gleichung entfernen und den Fixpunkt mit dem anderen substituieren könnte. Natürlich sollte auch die Lösung des Gleichungssystems davon nicht beeinflusst werden.

Der folgende Satz zeigt, dass das möglich ist.

Satz II.4.1:

Sei $\mathcal{E}$ ein boolesches Gleichungssystem der Form $\mathcal{E}_1(\sigma X = f)(\sigma Y = f)\mathcal{E}_2$. Falls

- 1) $\theta_1 = [\mathcal{E}_1(\sigma X = f)(\sigma Y = f)\mathcal{E}_2]\theta$
- 2) $\theta'_2 = [\mathcal{E}_1[X/Y](\sigma Y = f[X/Y])\mathcal{E}_2][X/Y]\theta$
- 3) $\theta_2 = \theta'_2[X/\theta'_2(Y)]$

Dann ist $\theta_1 = \theta_2$.

Beweis:

direkt. Die Ausführung der Schritte 1)-3) liefert den Beweis.

III. Lösen von booleschen Gleichungssystemen

Neben dem in der Definition II.1.4 angegebenen Verfahren zum Lösen von booleschen Gleichungen, gibt es noch eine Reihe weiterer. Diese sollen nun in diesem Abschnitt vorgestellt werden.

Die vorgestellten Algorithmen lassen sich in zwei Klassen zuordnen und zwar globale und lokale Verfahren. Bei den globalen Verfahren handelt es sich um solche, bei denen das ganze boolesche Gleichungssystem gelöst werden muss. Bei den lokalen hingegen werden nur die Teile des Gleichungssystem berechnet, die notwendig sind um eine Variable auszuwerten.

1) Approximation:

Als erstes Verfahren soll nun die **Approximation** vorgestellt werden. Hierbei handelt es sich um ein **globales Verfahren**.

Algorithmus-Schema:**Fixpunkte:**

Sei $(A, \leq)$ nach Definition I.1.5 vollständig. Dann besitzt A ein sog. **unterstes Element u** und **oberstes Element o** ⁴. Somit lassen sich der kleinste/größte Fixpunkt einfach durch wiederholtes Anwenden von f auf das Ergebnis bestimmen.

zb: $\mu X. f(X) = u \leq f(u) \leq f(f(u)) \leq \dots \leq f^i(u)$. Analog lässt sich der größte Fixpunkt von o ausgehend bestimmen.

Dieses Verfahren lässt sich auch leicht auf **eingebettete Fixpunkte** anwenden. Hierbei lassen sich die Funktionen simultan approximieren. Dies gilt aber nur für nicht alternierende Fixpunkte.

zb: Sei $\mu X_1. f_1(X_1, \mu X_2. f_2(X_1, X_2))$ eingebetteter Fixpunkt. Um den kleinsten Fixpunkt zu bestimmen lassen sich beide Funktionen simultan approximieren.

⁴ engl. "bottom element" und "top element"

Dann gilt für $f_1^{i+1}(u) = f_1(f_1^i(u), f_2^{i+1}(u))$ und $f_2^{i+1}(u) = f_2(f_1^i(u), f_2^i(u))$.

Man erhält somit: $u \leq f_1(u) \leq f_1^2(u) \leq \dots \leq f_1^i(u) = \mu X_1. f_1(X_1, \mu X_2. f_2(X_1, X_2))$ für ein $i \in \mathbb{N}$.

Im Falle eines **alternierenden Fixpunktes** ist, wie bereits gesagt, eine simultane Approximation nicht möglich.

zb: Sei $\nu X_1. f_1(X_1, \mu X_2. f_2(X_1, X_2))$ alternierender Fixpunkt. Wenn man jetzt $\nu X_1. f_1$ approximiert, dann braucht man für jede Auswertung von f_1 eine vollständige Approximation von $\mu X_2. f_2$.

Man erhält somit: $f_1^{i+1}(o) = f_1(f_1^i(o), \mu X_2. f_2(f_1^i(o), X_2))$.

Boolesche Gleichungssysteme:

Der Approximationsalgorithmus lässt sich auch direkt auf boolesche Gleichungssysteme anwenden. Interessant hierbei ist, dass die Gleichungen eines Blockes simultan approximiert werden können.

2) Tableaux:

Hierbei handelt es sich um ein **lokales Verfahren**, dh anstatt das ganze boolesche Gleichungssystem zu lösen, gibt das Tableaux nur die **Lösung für eine einzige Variable** an. Es ist somit nicht notwendig, alle Gleichung zu lösen.

Algorithmus-Schema:

Sei $\mathcal{E}$ ein boolesches Gleichungssystem in Normalform (Def. II.2.2) und sei θ eine Umgebung. Ferner sei $\theta' = [\mathcal{E}]\theta$ die Lösung des booleschen Gleichungssystems. Man muss nun zeigen, dass gilt $([\mathcal{E}]\theta)(X_i) = \text{true}$. Dies ist der Fall, wenn für $\sigma_i X_i = f_i$ gilt $f_i(\theta') = \text{true}$. Also muss man nun zeigen, dass f_i den Wert "true" bekommt. Dies wird sukzessiv fortgesetzt und es entsteht ein "Beweisbaum" mit der Wurzel X_i , und Knoten, die oben genannte "Zwischenziele" symbolisieren. In jedem Knoten werden Regeln so lange angewandt, bis eine Abbruchbedingung erfüllt ist.

Abbruchsbedingung 1:

Der Knoten n , der X_j beinhaltet, ist ein Blatt des Tablaux, wenn es einen Pfad von n bis zur Wurzel gibt und dazwischen einen weiteren Knoten n' , der X_j beinhaltet. Ferner gibt auf dem Pfad von n nach n' keinen Knoten der eine Variable X_i beinhaltet, aus einem Block $B_i \triangleleft B_j$ ($X_i \in B_1; X_j \in B_j$). Einen solchen Knoten n' bezeichnet man als "companion" von n .

Abbruchsbedingung 2:

Etwas schwächere Variante von Abbruchsbedingung 1. Hier wird nicht verlangt, dass es zwischen dem Blatt n , das X_j enthält, und der Wurzel einen Knoten gibt, der X_i - wie oben beschrieben, enthält.

Es fehlt nur noch die Entscheidung, ob es sich um ein **erfolgreiches Blatt** oder ein **nicht erfolgreiches Blatt** handelt.

Erfolgsbedingung:

Ein Blatt, das eine σ Variable enthält ist erfolgreich. Ein Blatt das eine μ Variable enthält ist nicht erfolgreich.

3) Gauß Elimination

Hier handelt es sich um ein Verfahren, bei dem schrittweise das Gleichungssystem um eine Variable und Gleichung reduziert wird. Diese Reduzierung erfolgt in zwei Schritten. Einen **Eliminationschritt** und einem **Substitutionschritt**. Die Richtigkeit dieser beiden Schritte soll nun anhand von 2 Lemmata gezeigt werden.

Lemma III.3.1 (Elimination):

Seien $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ boolesche Gleichungssysteme und seien $\sigma X = f$ und $\sigma X = f'$ boolesche Gleichungen mit $f' = f[X/b_\sigma]$. Dann gilt:

$$[\mathcal{E}_1(\sigma X = f) \mathcal{E}_2] \theta = [\mathcal{E}_1(\sigma X = f') \mathcal{E}_2] \theta$$

Beweis:

direkt durch Einsetzen.

Lemma III.3.2 (Substitution):

Seien $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ und $\mathcal{E}_3$ boolesche Gleichungssysteme und seien $\sigma_1 X_1 = f$, $\sigma_1 X_1 = f'$ und $\sigma_2 X_2 = g$ mit $f' = f[X_2 / g]$. Dann gilt:

$$[\mathcal{E}_1(\sigma_1 X_1 = f) \mathcal{E}_2(\sigma_2 X_2 = g) \mathcal{E}_3] \theta = [\mathcal{E}_1(\sigma_1 X_1 = f') \mathcal{E}_2(\sigma_2 X_2 = g) \mathcal{E}_3] \theta$$

Beweis:

direkt durch Einsetzen.

Bevor nun in Pseudo-Code der Algorithmus der Gauß Elimination angegeben werden soll, noch einige Regeln, die zu Auswertung beachtet werden müssen.

Regeln III.3.3:

$$X \wedge \text{true} = X$$

$$X \vee \text{true} = \text{true}$$

$$X \wedge \text{false} = \text{false}$$

$$X \vee \text{false} = X$$

$$X \vee (X \wedge Y) = X$$

$$X \wedge (X \vee Y) = X$$

$$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) = X \wedge (Y \vee Z)$$

$$(X \vee Y) \wedge (X \vee Z) = X \vee (Y \wedge Z)$$

Gauß Elimination - Algorithmus (global):

Eingabe $((\sigma_1 X_1 = f_1) \dots (\sigma_n X_n = f_n))$ und θ

$i := n$

while not ($f_1 \equiv \text{true}$ **or** $f_1 \equiv \text{false}$)

do

Setze X_i in f_i auf den Wert b_σ ; (Eliminationschritt)

Substituiere X_i durch f_i in $f_1, \dots, f_{i-1}$; (Substitutionschritt)
 $f_1 := \text{Eval}(f_1); \dots; f_{i-1} := \text{Eval}(f_{i-1});$ (Evaluationschritt gemäß Regeln
 $i := i - 1;$ III.3.3)
od

Bemerkung III.3.4:

Dieser Algorithmus hört auf, wenn f_1 zu true/false ausgewertet wird. Ist man nun an der ganzen Lösung des booleschen Gleichungssystems interessiert, müssen die Elimination- und Substitutionschritte n -mal angewendet werden um für jedes X_i einen Ausdruck zu bekommen, der keine Variable $X_1, \dots, X_n$ enthält.

Ist man nur an der Lösung der ersten Variablen interessiert, so reicht es aus, nur diejenigen Gleichungen auszuwerten, die für die Lösung notwendig sind.

Die Idee ist nun, dass alle zur Lösung relevanten Gleichungen in einem neuen Gleichungssystem $\mathcal{E}'$ gesammelt werden, auf das dann der globale Gauß Elimination - Algorithmus angewendet wird.

Gauß Elimination - Algorithmus (lokal):

$\mathcal{E}' := (\sigma_1 X_1 = f_1)$
 Setze X_1 in f_1 auf den Wert b_σ ; (Eliminationschritt)
 $f_1 := \text{Eval}(f_1);$ (Evaluationschritt gemäß Regel III.3.3)
while not ($f_1 = \text{true}$ **or** $f_1 = \text{false}$)
 do
 Wähle X_j aus f_1 , wobei gilt $X_j \notin \text{lhs}(\mathcal{E}')$;
 Konstruiere f_j und füge $\sigma_j X_j = f_j$ zu $\mathcal{E}'$ hinzu;
 wende globale Gauß Elimination auf $\mathcal{E}'$ an
 od

C. Schluss

Die in dieser Arbeit vorgestellten Aussagen über boolesche Gleichungssysteme sollen einer Einführung in dieses Gebiet genügen. Natürlich gibt es noch eine Vielzahl weiterer interessanter Sätze und Lemmata - auch für allgemeine Fixpunktgleichungssysteme gültig - , aber diese würden den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen.

D. Bibliographie

- Mader, Angelika. Verification of modal properties using boolean equation systems. Edition Versal Band 8. Dieter Bertz Verlag.
- A. Tarski, A Lattice-theoretical Fixpoint Theorem and its Application. Pacific J.Math. 1955. Band 5. S. 285-309