

Di. 24.10.2006

Kuniko Yoshida

z.z.: $P \subsetneq E \subsetneq \text{Exp} \subsetneq 2E$ **Lemma 1**

Für jede k-Band DTM T gibt es eine 2-Band DTM T' mit $L(T)=L(T')$ und $\forall w \text{ Time}_{T'}(w)=O((\text{Time}_T(w))^2)$

Beweis

T' hat Alphabet $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#\}$ (# Trennsymbol) und auf Band 1 von T' stehen Inhalte der Bänder von T

Band 1 von T'	Inhalt	#	Inhalt	#		#	Inhalt	#	
	von Band 1		von Band 2				von Band k		

Band 2 von T'	↑	#	↑	#		#	↑	#	
---------------	---	---	---	---	-------	---	---	---	--

Auf Band 2 werden die Positionen der Leseköpfe markiert. Zur Simulation eines Schrittes von T wird einmal von links nach rechts durchgelaufen und Bandbeschriftungen und Kopfpositionen aktualisiert. Dabei eventuell alles nach rechts schieben, falls ein Band sich vergrößert.

Sei $\text{Time}_T(w)=t$. Dann Länge des benutzten Bandes $\leq k(t+1)$.
 Jeder Schritt von T wird simuliert durch $2k(t+1)+k$ Schritte von T', d.h.
 $\text{Time}_{T'}(w) \leq t \cdot 2k(t+2)=O(t^2)$ $\square$

Jedes Problem in P ist durch eine 2-Band DTM in polynomialer Zeit entscheidbar.

Zeige $P \subsetneq E$ durch Diagonalisierung. Wir definieren

$H_{\text{exp}} = \{(T, w) : T \text{ 2-Band DTM und } T \text{ akzeptiert } w \text{ in } 2^{|w|} \text{ Schritten}\}$

Wir zeigen, $H_{\text{exp}} \in E$ aber $H_{\text{exp}} \notin P$

Lemma 2

$H_{\text{exp}} \in E$

Beweis

Konstruiere eine 5-Band DTM, die H_{exp} akzeptiert:

Band 1 Eingabe (T, W)

Band 2,3 simuliere Bänder von T

Band 4 Zustand von T

Band 5 Zähler

Initialisierung:

- Eingabe (T, w) mit $T=(\Sigma, Q, I, q_0, \{ \text{Acc}, \text{Rej} \})$

- kopiere w auf Band 2
- initialisiere Band 4 mit q_0
- schreibe $\underbrace{1 \cdots \cdots 1}_{|w|}$ auf Band 5 ($2^{|w|}-1$ binär)

Simulation:

- solange Band 5 (Zähler) >0 ist
- suche auf Band 1 passenden Übergang in I
- aktualisiere Band 2,3,4 entsprechend
- akzeptiere, falls der Inhalt von Band 4 = Acc
- verwirfe, falls Band 4 = Rej, oder Zähler =0
- dekrementiere Zähler von Band 5
- Wenn Zähler abgelaufen, verwirfe!

Zeitaufwand:

$3n$ für kopieren, schreiben und lesen, d.h.
 $O(n)$ für Initialisierung,
 $2^{|w|} \cdot O(n)$ für Simulation, also insgesamt
 $2^{|w|} \cdot O(n) + O(n)$
 $= 2^n O(n) + O(n)$
 $= O(2^{2n})$
 Also gilt $H_{\text{exp}} \in E$ $\square$

Lemma 3

Beh.: $H_{\text{exp}} \notin P$

Beweis

Angenommen $H_{\text{exp}} \in P$. Nach Lemma 1 ex. ein 2-Band DTM T_{exp} und $k \in \mathbb{N}$ mit $L(T_{\text{exp}}) = H_{\text{exp}}$ und $\text{Time}_{T_{\text{exp}}}((T, w)) \leq O((|T| + |w|)^k)$

Konstruiere 2-Band DTM D wie folgt:

- input T
- schreibe (T, T) auf Band 1
- simuliere T_{exp}
- akzeptiere, falls T_{exp} verwirft
- verwirfe sonst

Zeitaufwand: $O(|T|)$ zum Kopieren und $O(2|T|^k)$ Länge der Eingabe,
 also $O(|T|) + O(2|T|^k) + 1 = O(|T|^k)$

D akzeptiert die Eingabe T , genau dann wenn T akzeptiert T nicht in Zeit $2^{|T|}$ Nun gilt: D akzeptiert Eingabe D (in Zeit $O(|D|^k)$) o.B.d.A. $< 2^{|D|}$, falls $|D|$ zu klein, dann mache Maschine D künstlich größer.

Def. von H_{exp}
 $\iff (D,D) \in H_{\text{exp}}$

Annahme
 $\iff T_{\text{exp}}$ akzeptiert (D,D)

Konstr. von D
 $\iff D$ akzeptiert die Eingabe D nicht. ■ Wid.

$\Rightarrow H_{\text{exp}} \notin P \quad \square$

Mit Lemma 3 und 4 folgt

Theorem 4 $P \subsetneq E$

Bemerkung

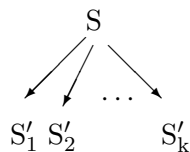
- Analog zeigt man, $E \subsetneq \text{Exp} \subsetneq 2E \subsetneq 3E \subsetneq \dots$
- im allgemeinen kann man durch Diagonalisierung zeigen, dass man in Zeit $t'(n)$ mehr erkennen kann als in Zeit $t(n)$, falls $t(n) \cdot \log t(n) = o(t'(n))$ (o ist klein!) und falls $t(n)$ und $t'(n)$ 'vernünftige' Funktionen sind. Das kann man als Satz formulieren (dazu muss 'vernünftig' präzisiert werden). Es gibt noch 'pathologische' Funktion $f(n)$, so dass in Zeit $2^{f(n)}$ nicht mehr erkannt wird als in Zeit $f(n)$. (Das zeigt 'Gap Theorem')

Nichtdeterministische Turingmaschine NTM

TM ohne die Einschränkung 'deterministisch', also für $q \in Q$, $s \in \Sigma^k$ gibt es mehrere passende Übergänge in I geben. Das bedeutet, globaler Zustand S kann mehrere Folgezustände $S \rightarrow S', \rightarrow S'' \dots$ haben.

Berechnungsbaum einer NTM bei Eingabe w :

- endlich verzweigter Baum, der Baum ist endlich oder unendlich
- beschriftet mit globalen Zuständen
- Wurzel $S_0(w)$ ist mit Anfangszustand beschriftet
- Knoten S hat soviele Kinder wie es Folgezustände $S \rightarrow S'$ gibt.



NTM akzeptiert w , wenn es im Berechnungsbaum einen Pfad gibt, der im Endzustand Acc endet. (also: bei mehreren Möglichkeiten rät die Maschine welche zu wählen ist, und rät immer bestmöglich)

Für NTM T , w gilt:

$$\text{NTIME}_T = \begin{cases} \text{Länge des kürzesten akzeptierenden Pades, falls } w \in L(T) \\ \text{Länge des kürzesten Pfades, sonst} \end{cases}$$

Komplexitätsklassen

$NP := \{ L: \text{es ex. NTM } T \text{ und } k \in \mathbb{N} \text{ mit } L=L(T) \text{ und } TIME_T(w)=O(|w|^k) \}$

$NE := \{ L: \text{es ex. NTM } T \text{ und } k \in \mathbb{N} \text{ mit } L=L(T) \text{ und } TIME_T(w)=O(2^{k|w|}) \}$

$NEXP := \{ L: \text{es ex. NTM } T \text{ und } k \in \mathbb{N} \text{ mit } L=L(T) \text{ und } TIME_T(w)=O(2^{|w|^k}) \}$

Es gilt:

$$\begin{array}{ccccc} P & \subsetneq & E & \subsetneq & EXP \\ \bigcap & | & \bigcap & | & \bigcap \\ NP & \subsetneq & NE & \subsetneq & NEXP \end{array}$$

$NP \subsetneq NE$ zeigt man ähnlich wie $P \subsetneq E$ durch Diagonalisierung.

Auch andere 'horizontale' Inklusionen zeigt man analog. Aber 'vertikale' Inklusionen insbesondere

$$P \subseteq NP \text{ echt?}$$

ist wichtiges offenes Problem und für die richtige Lösung bietet Clay Foundation \$ 1.000.000 an!