Beweis Übung. ∎

Der folgende, für die Fixpunkttheorie fundamentale Satz, benutzt dieses Lemma. Er ist trotz seiner Wichtigkeit nicht allzu schwer zu beweisen. Wir präsentieren ihn jedoch hier lediglich, um die Definition der $\mathcal{L}_\mu$-Semantik nachträglich zu motivieren, und verzichten auf den Beweis.

Satz 6.1 (Knaster/Tarski [Tar55])
Sei $\mathcal{T}$ ein Transitionssystem, ρ eine Umgebung und $\varphi \in \mathcal{L}_\mu$. Dann ist $[\![\mu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho$ der kleinste (bzgl. $\subseteq$) Fixpunkt der Abbildung $T \mapsto [\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\rho[X \mapsto T]}$. Genauso ist $[\![\nu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho$ der größte Fixpunkt dieser Abbildung.

Dieser Satz hat unmittelbare Konsequenzen. Z.B. dass man die propositionalen Konstanten $\mathtt{tt}$ und $\mathtt{ff}$ auch über einem $\mathcal{P} = \emptyset$ definieren kann: $\mathtt{tt} \equiv \nu X.X$, $\mathtt{ff} \equiv \mu X.X$.

Korollar 6.1
Für alle $\varphi \in \mathcal{L}_\mu$, alle $X \in \mathcal{V}$ und alle σ gilt $\sigma X.\varphi \equiv \varphi[\sigma X.\varphi/X]$.

Korollar 6.2
Für alle $\varphi \in \mathcal{L}_\mu$ und alle $X \in \mathcal{V}$ gilt: $\models \mu X.\varphi \rightarrow \nu X.\varphi$.

Beweis Sei $\mathcal{T}$ ein Transitionssystem. Wegen Kor. 6.1 gilt für alle ρ

$$[\![\mu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho \quad = \quad [\![\varphi[\mu X.\varphi/X]]\!]^{\mathcal{T}}_\rho$$

Die linke Seite der Gleichung hängt nicht von $\rho(X)$ ab, also auch die rechte Seite nicht. Somit gilt auch

$$[\![\mu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho \quad \subseteq \quad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\rho[X \mapsto [\![\mu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho]} \tag{6.2}$$

Dann folgt aber $[\![\mu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho \subseteq [\![\nu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho$, da wegen (6.2) gilt

$$[\![\mu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho \quad \in \quad \{T \subseteq \mathcal{S} \mid T \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\rho[X \mapsto T]}\}$$

also auch

$$[\![\mu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho \quad \subseteq \quad \bigcup\{T \subseteq \mathcal{S} \mid T \subseteq [\![\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_{\rho[X \mapsto T]}\} \quad = \quad [\![\nu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho$$

was zu zeigen war. ∎

6.2. Beispiele

Folgende Abkürzungen erlauben es, in knapper Schreibweise über einen oder alle Nachfolger eines Zustandes zu sprechen, unabhängig von der Beschriftung der Kante, mit der dieser Nachfolger erreicht wird.

$$\langle - \rangle \varphi \quad := \quad \bigvee_{a \in \Sigma} \langle a \rangle \varphi \qquad\qquad [-]\varphi \quad := \quad \bigwedge_{a \in \Sigma} [a]\varphi$$

Genauso definieren wir $\langle -a \rangle \varphi := \bigvee_{b \neq a} \langle b \rangle \varphi$ und $[-a]\varphi := \bigwedge_{b \neq a} [b]\varphi$.

Definition 6.3
Ähnlich wie bei CTL lassen sich auch für Fixpunktformeln des μ-Kalküls *Approximanden* definieren.

$$\begin{array}{rcl} \mu^0 X.\varphi & := & \mathtt{ff} \\ \mu^{k+1} X.\varphi & := & \varphi[\mu^k X.\varphi/X] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \nu^0 X.\varphi & := & \mathtt{tt} \\ \nu^{k+1} X.\varphi & := & \varphi[\nu^k X.\varphi/X] \end{array}$$

wobei $k \in \mathbb{N}$.

Diese sind nicht nur nützlich für die Berechnung der Semantik einer Formel $\sigma X.\varphi$ in einem endlichen Transitionssystem, sondern auch für das Verständnis der von einer Formel ausgedrückten Eigenschaft. Folgendes Lemma besagt – ähnlich zu den Approximanden bei CTL – dass kleinste Fixpunktformeln nur durch endliches Abwickeln bewiesen werden können, während bei größten Fixpunktformeln unendliches Abwicklen nicht zum Widerlegen führt. Beachte, dass die Äquivalenzen in folgendem Lemma nicht mehr gelten, wenn Transitionssysteme mit unendlichem Zustandsraum betrachtet werden. Für diesen Fall muss man die Definition der Approximanden von allen natürlichen Zahlen auf alle Ordinalzahlen erweitern.

Lemma 6.3
Sei $\mathcal{T}$ ein endliches Transitionssystem, ρ eine Umgebung, $X \in \mathcal{V}$ und $\varphi \in \mathcal{L}_\mu$. Dann gilt

$$[\![\mu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\![\mu^k X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho \qquad [\![\nu X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [\![\nu^k X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}_\rho$$

Beweis Übung. ■

Beispiel 6.1
Wir stellen uns die Frage, was die folgenden Formeln

- $\varphi_1 := \mu X.[-]X$,
- $\varphi_2 := \nu X.\langle a\rangle X$,
- $\varphi_3 := \mu X.\langle -\rangle X$

bedeuten. Dazu benutzen wir Lemma 6.3. Dies besagt, dass – zumindest auf endlichen Transitionssystemen – φ_1 dasselbe aussagt wie

$$\bigvee_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{[-]\dots[-]}_{k \text{ mal}}\mathtt{ff}$$

ist. D.h. φ_1 besagt "es gibt ein k, so dass alle Zustände, die in höchstens k Schritten erreicht werden können, $\mathtt{ff}$ erfüllen". Oder "es gibt ein k, so dass alle Zustände, die in höchstens $k-1$ Schritten erreicht werden können, keinen Nachfolger haben". In anderen Worten: alle ausgehenden Pfade sind endlich.

Die Bedeutung von φ_2 kann man genauso mithilfe von Lemma 6.3 herleiten. Andererseits kann man sich auch überlegen, dass $\varphi'_1 := \mu X.[a]X$ besagt, dass alle ausgehenden

Pfade, die nur mit der Aktion a beschriftet sind, endlich sind. Dann benutzt man die Dualität von kleinsten und größten Fixpunkten aus dem Beweis von Lemma 6.1 und erhält, dass φ_2 die Existenz eines unendlichen a-Pfades beschreibt.

Wegen Lemma 6.3 gilt auf endlichen Transitionssystemen wieder, dass φ_3 folgendes ausdrückt: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass es einen Pfad der Länge k zu einem Zustand gibt, der $\mathtt{ff}$ erfüllt. Dies ist aber unerfüllbar. Also gilt $\varphi_3 \equiv \mathtt{ff}$.

Satz 6.2
CTL $\lneq \mathcal{L}_\mu$.

Beweis Wir geben eine induktive Übersetzung von CTL nach $\mathcal{L}_\mu$ an. Aufgrund der Fixpunktcharakterisierungen der temporalen Operatoren in CTL ist die Korrektheit der Übersetzung leicht einzusehen.

$$\begin{array}{rcl}
tr(q) & := & q \quad \text{falls } q \in \mathcal{P} \\
tr(\varphi \vee \psi) & := & tr(\varphi) \vee tr(\psi) \\
tr(\varphi \wedge \psi) & := & tr(\varphi) \wedge tr(\psi) \\
tr(\neg\varphi) & := & \neg tr(\varphi) \\
tr(\mathtt{EX}\varphi) & := & \langle - \rangle tr(\varphi) \\
tr(\mathtt{AX}\varphi) & := & [-] tr(\varphi) \\
tr(\mathtt{E}(\varphi \mathtt{U} \psi)) & := & \mu X. tr(\psi) \vee (tr(\varphi) \wedge \langle - \rangle X) \\
tr(\mathtt{E}(\varphi \mathtt{R} \psi)) & := & \nu X. tr(\psi) \wedge (tr(\varphi) \vee \langle - \rangle X) \\
tr(\mathtt{A}(\varphi \mathtt{U} \psi)) & := & \mu X. tr(\psi) \vee (tr(\varphi) \wedge \langle - \rangle \mathtt{tt} \wedge [-] X) \\
tr(\mathtt{A}(\varphi \mathtt{R} \psi)) & := & \nu X. tr(\psi) \wedge (tr(\varphi) \vee (\langle \mathtt{tt} \rangle \wedge \langle - \rangle X))
\end{array}$$

wobei X jeweils eine bisher unbenutzte Variable ist.

Die zusätzlichen Konjunkte $\langle - \rangle \mathtt{tt}$ verhindern, dass z.B. der kleinste Fixpunkt, der das $\varphi \mathtt{U} \psi$ modellieren soll, auf einem endlichen Pfad nur dadurch erreicht wird, dass ein Zustand keinen Nachfolger hat, ohne dass ψ jemals erfüllt wurde. ■

Das folgende Beispiel zeigt ebenfalls, dass $\mathcal{L}_\mu$ zumindest nicht ausdrucksschwächer als die temporalen Logiken der vorigen Kapitel ist.

Beispiel 6.2
Zur Erinnerung: Satz 4.3 besagt, dass es keine LTL-Formel gibt, die ausdrückt, dass auf allen Pfaden eines Transitionssystems die Proposition q nach einer geraden Anzahl von Schritten gilt. Man überzeugt sich leicht, dass dies auch nicht in CTL oder CTL* ausgedrückt werden kann. In $\mathcal{L}_\mu$ ist dies jedoch aufgrund der Möglichkeit, in jeder Abwicklung eines Fixpunktoperators mehrere modale Schritte nacheinander zu machen, kein Problem: $\mu X. q \vee [-][-]X$.

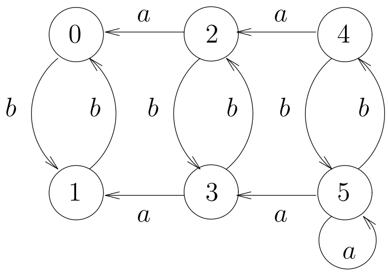
Treten Fixpunktoperatoren in einer Formel verschachtelt auf, dann wird es schwierig, solch einer Formel ihre Bedeutung abzulesen. Dabei müssen wir allerdings zwei Arten von Verschachtelung unterscheiden.

Beispiel 6.3
Sei $\varphi := \nu Z.[a](\mu Y.\langle - \rangle \texttt{tt} \wedge [-b]Y) \wedge [-]Z$. Hier sind Fixpunktoperatoren zwar *verschachtelt*, aber nicht *verschränkt*, da Z nicht in $\mu Y. \ldots$ vorkommt. Vergleiche dies auch mit den Formeln, die aus der Übersetzung von CTL entstehen. Dabei kann man sich die Bedeutung induktiv erarbeiten.

1. $\mu Y.\langle - \rangle \texttt{tt} \wedge [-b]Y$ bedeutet, dass es immer wieder einen Nachfolger geben muss solange keine b-Aktion stattgefunden hat. Dies muss aber auf jedem Pfad irgendwann einmal passieren.

2. φ besagt dann, dass überall auf jede a-Aktion auf jedem Pfad schließlich eine b-Aktion folgen muss.

Beispiel 6.4
Bei Formeln mit verschränkten Fixpunktoperatoren wie z.B. $\varphi := \mu X.\nu Y.[a]X \wedge [-a]Y$ hilft es oft nur, die Semantik in Bezug auf ein gegebenes Transitionssystem mithilfe von Fixpunktiteration zu berechnen. Sei $\mathcal{T}$ das folgende Transitionssystem.



Die folgende Tabelle stellt die Berechnung der Semantik mittels verschränkter Fixpunktiteration dar.

	$[\![\mu^i X.\nu Y.[a]X \wedge [-a]Y]\!]^{\mathcal{T}}$	$[\![\nu^j Y.[a]X \wedge [-a]Y]\!]^{\mathcal{T}}_{[X \mapsto [\![\mu^i X.\nu Y.[a]X \wedge [-a]Y]\!]^{\mathcal{T}}]}$
$i = 0$	$\emptyset$	
$j = 0$		$\{0,1,2,3,4,5\}$
$j = 1$		$\{0,1\}$
$j = 2$		$\{0,1\}$
$i = 1$	$\{0,1\}$	
$j = 0$		$\{0,1,2,3,4,5\}$
$j = 1$		$\{0,1,2,3\}$
$j = 2$		$\{0,1,2,3\}$
$i = 2$	$\{0,1,2,3\}$	
$j = 0$		$\{0,1,2,3,4,5\}$
$j = 1$		$\{0,1,2,3,4\}$
$j = 2$		$\{0,1,2,3\}$
$j = 2$		$\{0,1,2,3\}$
$i = 3$	$\{0,1,2,3\}$	

Im Übrigen besagt φ, dass auf jedem Pfad nur endlich viele a-Aktionen gesehen werden.

6.3. Entscheidungsverfahren und Komplexität

Im folgenden definieren wir strukturelle Maße einer Formel, die bei der Komplexität des Model Checkings eine große Rolle spielen.

Definition 6.4
Die *Fixpunkttiefe* einer Formel φ, $\mathit{fpd}(\varphi)$, ist – ähnlich der temporalen Tiefe bei Logiken der vorigen Kapitel – die maximale Anzahl von Fixpunktquantoren auf einem Pfad des Syntaxbaums von φ.

Dass die Fixpunkttiefe kein gutes Maß für die Komplexität einer Formel ist, zeigen die folgenden Beispiele.

- Sei $X \notin \mathit{free}(\varphi)$. Dann gilt $\sigma X.\varphi \equiv \varphi$, aber $\mathit{fpd}(\sigma X.\varphi) > \mathit{fpd}(\varphi)$.

- Betrachte die Formeln $\varphi_1 := \nu Z.[a](\mu Y.\langle - \rangle \mathtt{tt} \wedge [-b]Y) \wedge [-]Z$ und $\varphi_2 := \mu X.\nu Y.[a]X \wedge [-a]Y$ aus den obigen Beispielen. Es gilt $\mathit{fpd}(\varphi_1) = \mathit{fpd}(\varphi_2) = 2$, aber φ_2 scheint komplizierter zu sein als φ_1. Letzteres auf einem Transitionssystem $\mathcal{T}$ auszuwerten ist ähnlich zu dem globalen Model Checking Verfahren von CTL möglich. Zuerst wird $[\![\mu Y.[a]Y]\!]^{\mathcal{T}}$ per Fixpunktiteration berechnet, und mit dem Ergebnis kann dann $[\![\nu X.(\mu Y.[a]Y) \wedge [b]X]\!]^{\mathcal{T}}$ mithilfe einer weiteren Fixpunktiteration berechnet werden. Auf einem Transitionssystem der Größe n sind dabei also höchstens $2n$ viele Iterationsschritte notwendig.

  Dies gilt aber nicht für φ_2, denn $\nu Y.[a]Y \wedge [-a]X$ ist keine geschlossene Formel. Beachte, dass der Wert von X in einer Fixpunktiteration sich in jedem Schritt ändern kann. Das bedeutet, dass bei jeder Änderung von X die gesamte Fixpunktiteration für Y wiederholt werden muss, um den nächsten Wert für X zu berechnen. Das Auswerten von φ_2 auf einem Transitionssystem der Größe n kann also u.U. insgesamt n^2 viele Iterationsschritte benötigen.

Definition 6.5
Sei $\varphi \in \mathcal{L}_\mu$. Wir schreiben $X \prec_\varphi Y$, falls Y frei in $\mathit{fp}_\varphi(X)$ vorkommt. Dies bedeutet, dass die Semantik von $\mathit{fp}_\varphi(X)$ von dem Wert, den eine Umgebung Y zuweist, abhängt. Die Semantik von $\mathit{fp}_\varphi(Y)$ hängt jedoch nicht davon ab, wie eine Umgebung X interpretiert. Wir schreiben $<_\varphi$ für die transitive Hülle von $\prec_\varphi$.

Die *Schachtelungstiefe* einer $\mathcal{L}_\mu$-Formel φ, $\mathit{nd}(\varphi)$ ist definiert als das maximale n in einer Kette

$$X_1 <_\varphi X_2 <_\varphi \ldots <_\varphi X_n$$

von Variablen aus $\mathit{Sub}(\varphi)$. Die *Alternierungstiefe* einer Formel φ, $\mathit{ad}(\varphi)$ ist definiert als das maximale n in solch einer Kette, wenn für alle $i = 0, \ldots, n-1$ jeweils X_i und X_{i+1} unterschiedlichen Fixpunkttyp haben.

Sei $\mathcal{L}_\mu^0$ die Menge aller fixpunktfreien $\mathcal{L}_\mu$-Formeln und für alle $k \geq 1$: $\mathcal{L}_\mu^k := \{\varphi \in \mathcal{L}_\mu \mid \mathit{ad}(\varphi) \leq k\}$. Das Fragment $\mathcal{L}_\mu^1$ wird auch als Menge der *alternierungsfreien* Formeln bezeichnet.

Lemma 6.4
Für alle $\varphi \in \mathcal{L}_\mu$ gilt: $ad(\varphi) \leq nd(\varphi) \leq fpd(\varphi)$.

Beweis Übung. ∎

Beispiel 6.5
Sei $\varphi := \mu X.[a]\nu Y_1.(X \vee \langle a \rangle(Y_1 \wedge \nu Y_2.([b](Y_1 \vee Y_2) \wedge \mu Z.[a]Y_2 \wedge [b]Z)))$. Dann gilt $Z \prec_\varphi Y_2$, $Y_2 \prec_\varphi Y_1$ und $Y_1 \prec_\varphi X$. Also ist $nd(\varphi) = 4$.

Der Fixpunkttyp von Z und X ist μ, der von Y_1 und Y_2 ist ν. Es gibt zwei maximale Ketten von Variablen, die der Definition der Alternierungstiefe genügen, nämlich

$$Z <_\varphi Y_1 <_\varphi X \qquad \text{und} \qquad Z <_\varphi Y_2 <_\varphi X$$

Also ist $\varphi \in \mathcal{L}_\mu^3$.

6.3.1. Das Model Checking Problem

Man beachte, dass HML $\equiv \mathcal{L}_\mu^0$ gilt. Jede geschlossene, quantoren-freie $\mathcal{L}_\mu$-Formel ist auch variablen-frei und somit in HML. Die Umkehrung gilt nachtürlich erst recht.

Korollar 6.3
Das Model Checking Problem für $\mathcal{L}_\mu^0$ – und somit auch $\mathcal{L}_\mu$ – ist P-hart.

Eine entsprechende obere Schranke können wir nicht angeben. Man kann zeigen, dass das Model Checking Problem für $\mathcal{L}_\mu$ sowohl in NP und deshalb wegen Komplementabschluss auch in co-NP liegt [EJ91]. Somit ist es höchstwahrscheinlich nicht NP-hart. Es wird sogar von vielen vermutet, dass es in P liegt.

Satz 6.3
Das Model Checking Problem für ein Transitionssystem $\mathcal{T}$ und eine $\mathcal{L}_\mu$-Formel φ kann in Zeit $O((|\mathcal{T}| \cdot |\varphi|)^{\max\{1, nd(\varphi)\}})$ gelöst werden.

Beweis Sei $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \{\xrightarrow{a} \mid a \in \Sigma\}, \lambda)$ ein Transitionssystem und $\varphi \in \mathcal{L}_\mu$ in positiver Normalform. Abb. 6.1 präsentiert einen Algorithmus, der das globale Model Checking Problem löst. Fixpunktoperatoren werden dabei gemäß Lemma 6.3 mithilfe von Fixpunktelimination behandelt. Freie Variablen werden wie in der Semantik durch eine Umgebung ρ interpretiert. Beachte, dass solch eine Umgebung sich leicht als Tabelle der Größe höchstens $|\varphi| \cdot |\mathcal{S}|$ darstellen lässt.

Korrektheit und Vollständigkeit zeigt man leicht per Induktion über die Formelstruktur. Für Fixpunktoperatoren benutzt man die Monotonie von ψ aus Lemma 6.2 um zu zeigen, dass die Unterprozedur FixPoint mit dem Ergebnis aus Lemma 6.3 terminiert.

Es bleibt zu zeigen, dass die Laufzeit von MC $O((|\mathcal{T}| \cdot |\varphi|)^{\max\{1, nd(\varphi)\}})$ ist. Wir gehen wieder davon aus, dass die Ergebnisse von rekursiven Aufrufen protokolliert werden, so dass bei einem nochmaligen Aufruf nicht die gesamte Berechnung neu durchgeführt werden muss.

Falls $nd(\varphi) = 0$, dann ist $\varphi \in$ HML und die Behauptung wurde bereits in Satz 2.2 gezeigt. Sei also $nd(\varphi) \geq 1$. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $nd(\varphi)$.

Algorithmus MC(φ,ρ)
```
case φ of
      q         : return  {s | q ∈ λ(s)}
      ¬q        : return  {s | q ∉ λ(s)}
      X         : return  ρ(X)
      ψ1 ∨ ψ2   : return  MC(ψ1,ρ) ∪ MC(ψ2,ρ)
      ψ1 ∧ ψ2   : return  MC(ψ1,ρ) ∩ MC(ψ2,ρ)
      ⟨a⟩ψ      : T := MC(ψ,ρ)
                  return  {s | ∃t ∈ T, s −a→ t}
      [a]ψ      : T := MC(ψ,ρ)
                  return  {s | ∀t ∈ S : s −a→ t ⇒ t ∈ T}
      μX.ψ      : return FixPoint(μ,X,ψ,ρ)
      νX.ψ      : return FixPoint(ν,X,ψ,ρ)
```

Algorithmus FixPoint(σ,X,ψ,ρ)
```
if σ = μ then T := ∅ else T := S
repeat
      T' := T
      T := MC(ψ,ρ[X ↦ T'])
until T' = T
return T
```

Abbildung 6.1.: Ein globaler Model Checking Algoritmus für $\mathcal{L}_\mu$.

Fall $nd(\varphi) = 1$**.** Somit gilt für alle Unterformeln der Form $\sigma X.\psi$ von φ: $\mathit{free}(\psi) \subseteq \{X\}$. Dann hängt das Ergebnis der Prozedur FixPoint bei Aufruf mit den Parametern σ, X, ψ, ρ nicht mehr von ρ ab. Wegen Lemma 6.2 muss dann jede Schleife in FixPoint nach höchstens $|\mathcal{T}|$ vielen Schritten terminieren. Für die anderen Operationen in MC gilt ebenfalls, dass sie in $O(|\mathcal{T}|)$ vielen Schritten berechnet werden können. Somit ist die Gesamtlaufzeit beschränkt durch $O(|\mathcal{T}| \cdot |\varphi|)$.

Fall $nd(\varphi) > 1$**.** Da die booleschen und die modalen Operatoren in Zeit $O(|\mathcal{T}|)$ – ohne rekursive Aufrufe mitzuzählen – berechnet werden können, betrachten wir zuerst maximale Unterformeln von der Form $\sigma X.\psi$ in φ, so dass $X \in \mathit{free}(\psi)$ und $nd(\psi) = k$ für ein $k \geq 1$. Nach Induktionshypothese terminiert jeder rekursive Aufruf von MC innerhalb von FixPoint in $O((|\mathcal{T}|\cdot|\psi|)^{nd(\psi)})$ vielen Schritten. Da $X \in \mathit{free}(\psi)$ hängt dessen Ergebnis jedoch i.A. von ρ ab, weswegen diese Aufrufe in jedem Schleifendurchlauf neu gemacht werden müssen. Somit terminiert die Schleife in Zeit $O(|\mathcal{T}| \cdot (|\mathcal{T}| \cdot |\psi|)^{nd(\psi)})$.

Da es in φ jedoch $O(|\varphi|)$ viele solcher maximalen Unterformeln geben kann, ist die Gesamtlaufzeit wiederum durch $O(|\mathcal{T}| \cdot |\varphi| \cdot (|\mathcal{T}| \cdot |\psi|)^{nd(\psi)}) = O((|\mathcal{T}| \cdot |\varphi|)^{nd(\varphi)})$ beschränkt. ∎

Dieses Resultat ist jedoch noch nicht optimal. Betrachte eine Formel der Form $\varphi_0 := \mu X.\varphi(X, \mu Y.\psi(X,Y))$, in der (zumindest oberhalb von $\mu Y.\psi$) keine weiteren Fixpunktoperatoren auftreten. Sei ein Transistionssystem $\mathcal{T}$ gegeben, auf dem MC $[\![\varphi_0]\!]^{\mathcal{T}}$ berechnet wird. Sei $S_i := [\![\mu^i X.\varphi]\!]^{\mathcal{T}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $T_{i,j} := [\![\mu^j Y.\psi]\!]^{\mathcal{T}}_{[X \mapsto S_i]}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Beachte, dass dies genau die Werte der Umgebungen sind, die sukzessive von MC für X und Y berechnet werden.

Sei $|\mathcal{T}| = n$, d.h. die Fixpunkte werden spätestens bei S_n bzw. $T_{n,n}$ erreicht. Dann gilt wegen Lemma 6.2:

$$\begin{array}{c} T_{0,0} \subseteq T_{0,1} \subseteq T_{0,2} \subseteq \ldots \subseteq T_{0,n-1} \subseteq T_{0,n} \\ T_{1,0} \subseteq T_{1,1} \subseteq T_{1,2} \subseteq \ldots \subseteq T_{1,n-1} \subseteq T_{1,n} \\ \vdots \\ T_{n,0} \subseteq T_{n,1} \subseteq T_{n,2} \subseteq \ldots \subseteq T_{n,n-1} \subseteq T_{n,n} \end{array}$$

Dies ist nicht überraschend. Durchlaufen dieses Tabelle zeilenweise entspricht der Art und Weise, wie Algorithmus MC einen Fixpunkt berechnet. Andererseits gilt ebenfalls wegen Lemma 6.2

$$T_{0,0} \subseteq T_{0,1} \subseteq T_{1,1} \subseteq T_{1,2} \subseteq T_{2,2} \subseteq \ldots \subseteq T_{n-1,n} \subseteq T_{n,n}$$

Dies liefert die Idee für eine effizientere Fixpunktberechnung. Statt in jeder Iteration für $\mu X.\varphi$ die gesamte Iteration für $\mu Y.\psi$ durchzuführen und somit im worst-case $O(n^2)$ viele Schritte zu machen, können die Fixpunkte *simultan* in höchstens $O(n)$ vielen Iterationen berechnet werden. Dies liefert eine Verbesserung von Satz 6.3. Beachte, dass dies nur bei Fixpunktoperatoren des gleichen Typs möglich ist.

Satz 6.4
Das Model Checking Problem für ein Transitionssystem $\mathcal{T}$ und eine $\mathcal{L}_\mu$-Formel φ kann in Zeit $O((|\mathcal{T}| \cdot |\varphi|)^{\max\{1, ad(\varphi)\}})$ gelöst werden.

Beweis Übung. ■

Korollar 6.4
Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: Das Model Checking Problem für $\mathcal{L}_\mu^k$ ist P-vollständig.

6.3.2. Das Erfüllbarkeitsproblem

Satz 6.2 zeigt, dass sich CTL in $\mathcal{L}_\mu$ einbetten lässt. Die Übersetzung ist linear. Außerdem erkennt man leicht, dass die resultierenden Formeln keine echte Alternierung aufweisen. Es gilt sogar $nd(tr(\varphi)) \leq 1$ für alle $\varphi \in$ CTL.

Korollar 6.5
Das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{L}_\mu^1$ – und somit auch $\mathcal{L}_\mu$ – ist EXPTIME-hart.

Satz 6.5
Das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{L}_\mu$ ist in EXPTIME.

$$\frac{\psi_1, \psi_2, \Phi}{\psi_1 \wedge \psi_2, \Phi} \qquad \frac{\psi_1, \Phi}{\psi_1 \vee \psi_2, \Phi} \qquad \frac{\psi_2, \Phi}{\psi_1 \vee \psi_2, \Phi}$$

$$\frac{X, \Phi}{\sigma X.\psi, \Phi} \qquad \frac{\psi, \Phi}{X, \Phi} \text{ falls } fp_{\varphi_0}(X) = \sigma X.\psi$$

$$\frac{\varphi_1, \{\psi_j \mid b_j = a_1\} \quad \dots \quad \varphi_n, \{\psi_j \mid b_j = a_n\}}{\langle a_1\rangle\varphi_1, \dots, \langle a_n\rangle\varphi_n, [b_1]\psi_1, \dots, [b_m]\psi_m, l_1, \dots, l_k}$$

Abbildung 6.2.: Die Regeln für die $\mathcal{L}_\mu$-Erfüllbarkeitstableaux.

Beweis Wir skizzieren lediglich den Beweis. Betrachte dazu die Tableau-Regeln aus Abb. 6.2, wobei φ_0 die Formel ist, deren Erfüllbarkeit zu entscheiden ist. Wegen Lemma 6.1 können wir davon ausgehen,dass φ_0 in positiver Normalform vorliegt. Die l_i in der letzten Regel sind jeweils nur Literale über $\mathcal{P}$.

Wie üblich kann ein erfolgreicher Tableau-Pfad in einer Konfiguration enden, die nur aus einer konsistenten Menge von Literalen besteht. Die Bedingung an unendliche Tableau-Pfade benutzt wiederum den Begriff des internen Pfades. Beachte, dass wegen der Schachtelung von Fixpunktoperatoren auf einem internen Pfad mehrere Variablen vorkommen können. Allerdings kann man leicht zeigen, dass für je zwei solcher Variablen X und Y entweder $X <_{\varphi_0} Y$ oder $Y <_{\varphi_0} X$ gilt. Somit gibt es auf einem unendlichen, internen Pfad immer eine größte Variable bzgl. $<_{\varphi_0}$, die unendlich oft auftritt. Diese muss vom Typ ν sein.

Somit kann ein Blatt in dem Tableau auch eine beliebige Konfiguration sein, die auf demselben Pfad schon einmal aufgetreten ist, so dass es zwischen den beiden Auftreten keinen internen Pfad gibt, auf dem die größte Variable den Fixpunkttyp μ hat.

Korrektheit und Vollständigkeit dieser Konstruktion zeigt man dann wieder über eine Modellkonstruktion bzw. durch Annotierung der Tableau-Knoten mit Zuständen eines Transitionssystems. Dass die Existenz eines solchen Tableaus in exponentieller Zeit entschieden werden kann, benutzt wieder die Tatsache, dass EXPTIME =APSPACE gilt. Beachte, dass jeder Pfad der Länge $|\varphi_0| \cdot 2^{|\varphi_0| \cdot ad(\varphi_0)}$ eine Wiederholung aufweisen muss, so dass entweder dazwischen ein internen Pfad mit größter Variable vom Typ μ vorliegt, oder alle internen Pfad so ins Unendliche verlängert werden können, dass dies nie der Fall ist. Außerdem kann jede Konfiguration in diesen Tableaux mit Platz höchstens linear in $|\varphi_0|$ gespeichert werden. Somit kann man wieder einen alternierenden, polynomiell platzbeschränkten Algorithmus verwenden für die Lösung dieses Problem verwenden. ∎

Korollar 6.6
Für alle $\varphi \in \mathcal{L}_\mu$ gilt: Wenn φ erfüllbar ist, dann hat es ein Modell der Größe höchstens $2^{O(|\varphi|^2)}$.

Korollar 6.7
Es gibt keine erfüllbarkeitserhaltende, polynomielle Übersetzung von CTL* nach $\mathcal{L}_\mu$.