

Übungen zur Vorlesung Termersetzungssysteme

Blatt 1

Allgemeine Hinweise zum Übungsbetrieb: Das wöchentliche Übungsblatt erscheint jeweils montags. Die Aufgaben sind zu Hause vorzubereiten. Ihre Lösungsvorschläge dürfen Sie in der Übung in der darauffolgenden Woche präsentieren. Ihre aktive und erfolgreiche Teilnahme an den Übungen ist eine notwendige Voraussetzung für den Erhalt eines Vorlesungsscheins. Bitte beachten Sie, dass in der Regel sowohl Vorder- als auch Rückseite mit Aufgaben bedruckt sind.

Im Folgenden sei (A, \rightarrow) ein abstraktes Reduktionssystem.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die Relation \leftrightarrow^* die kleinste Äquivalenzrelation ist, die die Relation \rightarrow enthält.

Aufgabe 2: Ist die reflexive Hülle der transitiven Hülle der Relation \rightarrow immer dasselbe wie die transitive Hülle der reflexiven Hülle von \rightarrow ? Welche der beiden soeben definierten Relationen unterscheiden sich im allgemeinen von \leftrightarrow^* ?

Aufgabe 3: Beweisen Sie, dass \rightarrow konfluent und terminierend ist genau dann wenn jedes Element genau eine Normalform besitzt.

Aufgabe 4: Gegeben Sei das aus der Vorlesung bekannte Reduktionssystem R , welches symbolische Differentiation modelliert:

$$\begin{aligned}D_X(X) &\rightarrow 1 \\D_X(Y) &\rightarrow 0 \\D_X(u + v) &\rightarrow D_X(u) + D_X(v) \\D_X(u * v) &\rightarrow u * D_X(v) + D_X(u) * v\end{aligned}$$

a) Seien die Terme von R erweitert um Ausdrücke der Form X^n , wobei n eine natürliche Zahl ist, die dargestellt wird mittels 0 und der Nachfolgerfunktion $s(\cdot)$. Diese Ausdrücke sollen die Potenzbildung, also n -faches $*$ -Produkt, modellieren.

Erweitern Sie R um möglichst einfache Regel(n), die die symbolische Differentiation von solchen Termen erlauben.

b) Wir fügen nun zu R , erweitert um die Regel(n) aus Teilaufgabe a), noch die folgende Regel hinzu:

$$X^{s(n)} \rightarrow X * X^n$$

Diskutieren Sie, ob das erweiterte System konfluent und terminierend ist (Kein formaler Beweis verlangt).

c) Sei nun das Termersetzungssystem nochmals erweitert um die Regel

$$X^{s(0)} \rightarrow X$$

Ist das so entstandene System konfluent und terminierend? Diskutieren Sie (Kein formaler Beweis verlangt). Geben Sie im Falle der Nicht-Konfluenz geeignete Regeln an, durch deren Hinzufügen das System wieder konfluent wird, und die mit den mathematischen Gesetzmäßigkeiten für Differentiation verträglich sind.