

Übungen zur Vorlesung Termersetzungssysteme

Blatt 3

Aufgabe 9: Die Trägermenge der Relation $\rightarrow$ bestehe aus allen endlichen Multimengen von natürlichen Zahlen ≥ 2 . Endlich heißt hierbei, dass jede natürliche Zahl nur endlich oft vorkommt, und nur endlich viele verschiedene Zahlen vorkommen.

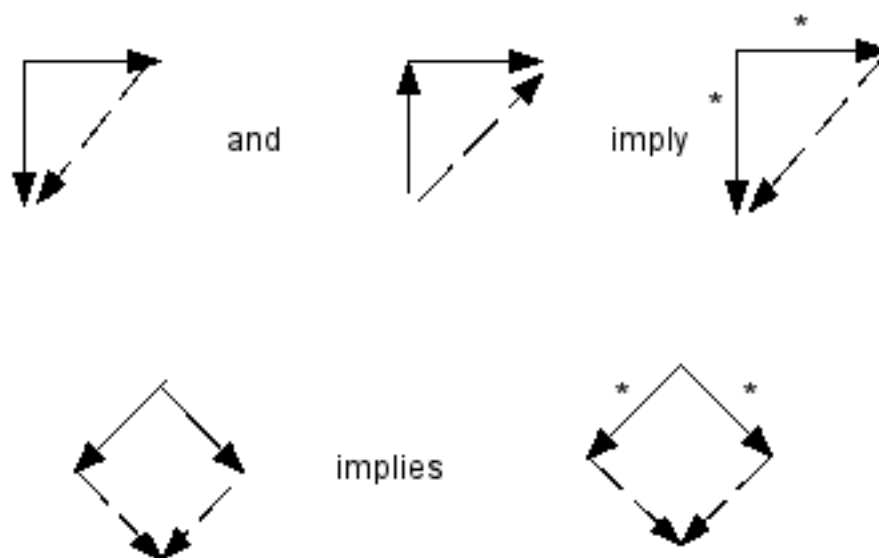
- Für zwei Multimengen gilt $M_1 \rightarrow M_2$ genau dann wenn $M_2 = (M_1 \setminus \{n\}) \cup \{k, \ell\}$ falls $k \cdot \ell = n$ und $k, \ell \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Relation normalisierend ist, möglichst ohne einen Terminationsbeweis zu benutzen.
- Zeigen Sie dass die Relation nicht mehr normalisierend ist, falls wir in obiger Relation erlauben, dass k oder ℓ gleich 1 ist, und die Trägermenge entsprechend anpassen.

Aufgabe 10: Betrachten Sie die folgende Relation auf $\mathbb{N}^*$, also der Menge aller endlichen Wörter über $\mathbb{N}$: Für alle Wörter $u, v \in \mathbb{N}^*$ und Zahlen $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$u(i+1)v \rightarrow uiv.$$

Finden Sie eine Maßfunktion $\Phi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, die zeigt, dass $\rightarrow$ terminiert.

Aufgabe 11: Formulieren Sie die Aussagen der beiden folgenden Diagramme in Prädikatenlogik:



Damit sollte sofort klar sein, dass die Aussagen gelten. Beweisen Sie diese Aussagen auf rein diagrammatischem Wege.

Aufgabe 12: Gegeben Sei die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit der Berechnungsvorschrift

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} f(1, y - 1) & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0 \\ x + 1 & \text{if } y = 0 \\ f(f(x - 1, y), y - 1) & \text{if } x > 0 \text{ and } y > 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe einer Maßfunktion auf einer geeigneten Relation, dass die Auswertung der Funktion f terminiert.