Institut für Informatik
der Universität München
Dr. M. Lange
H. Gruber

WS 07/08

3.12.07

Übungen zur Vorlesung
Termersetzungssysteme
Blatt 4

Aufgabe 13: Beweisen Sie:
Sei $<$ eine strikte totale Ordnung auf einer Menge A. Für eine Multimenge $M \in \mathcal{M}(A)$ sei $\overrightarrow{M}$ die Sortierung von M als Wort (oder "Liste") absteigend bezüglich $<$. Dann gilt für alle $M, N \in \mathcal{M}(A)$:

$$M <_{mul} N \Leftrightarrow \overrightarrow{M} <_{lex} \overrightarrow{N}.$$

Aufgabe 14: Für eine Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ bezeichne $\mathrm{lpf}(n)$ den kleinsten Primfaktor von n. Die partielle Ordnung $(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \sqsubseteq)$ Sei gegeben durch $X \sqsubseteq y$ genau dann wenn $\mathrm{lpf}(x) < \mathrm{lpf}(y)$ oder $\mathrm{lpf}(x) = \mathrm{lpf}(y)$ und $\frac{x}{\mathrm{lpf}(x)} \leq \frac{y}{\mathrm{lpf}(y)}$. Zeigen Sie, dass diese Ordnung wohlfundiert ist und bestimmen Sie deren Ordnungstyp.

Aufgabe 15: Der Kampf von Herkules gegen Hydra ist ein Spiel, das wie folgt definiert ist: Eine *Hydra* ist ein endlicher verwurzelter Baum, dessen Blätter wir als *Köpfe* bezeichnen. Für einen Knoten v der Hydra bezeichnen wir mit $T(v)$ den Teilbaum der Hydra mit Wurzel v. Das Spiel geht rundenweise wie folgt:

In jeder Runde schlägt Herkules einen Kopf x der Hydra ab. Sei y der Vaterknoten von x und z der Grossvaterknoten von k. Der Hydra wachsen in der n-ten Runde $n!$ viele Kopien von $T(y) - x$ aus dem Knoten z. Hierbei ist $T(y) - x$ der Baum $T(y)$ aus dem x entfernt wurde. Das Spiel wird auf der so entstandenen Hydra fortgesetzt. Siehe Abbildung für ein Beispiel aus der zweiten Runde. Zeigen Sie, dass Herkules immer nach endlicher Zeit die Hydra besiegt, d.h. dass er irgendwann alle Köpfe abgeschlagen hat.

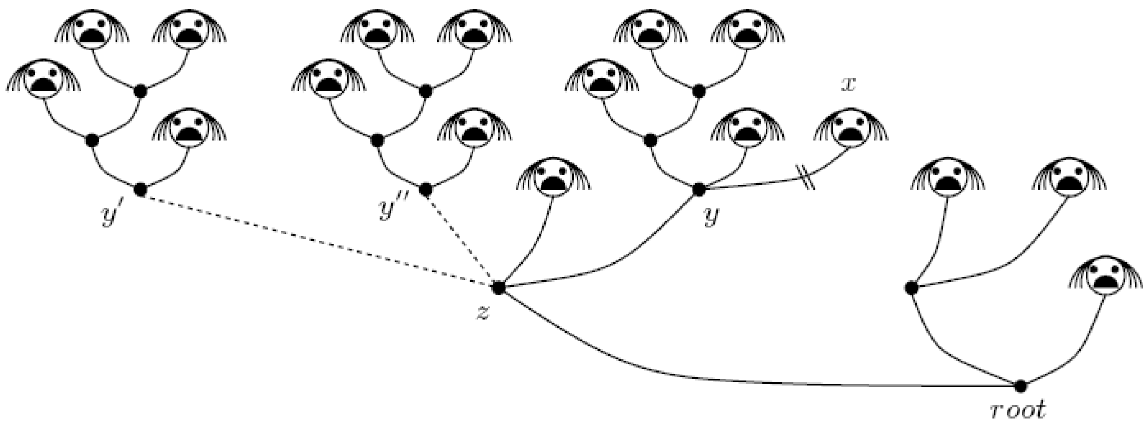

Abbildung 1: aus R. Fleischer: "Die another day", Fun with Algorithms 2007, LNCS 4475

Hinweis: Es ist nicht ganz einfach zu sehen, was hier eigentlich absteigt. Benutzen Sie eine Multimengenordnung, die auf $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <_{lex})$ basiert.