

Übung zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie

Tutorübung: 27. Oktober 2008 Abgabetermin: 2. November 2008

Aufgabe 1 *Zusammenhang* (H)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Zeigen oder widerlegen Sie, dass G für jedes k , $1 \leq k \leq |V|$, einen zusammenhängenden Teilgraphen mit k Knoten enthält.

Aufgabe 2 *Brücken* (H)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Eine Kante $e \in E$ heißt *Brücke*, wenn der Graph $G' = (V, E \setminus \{e\})$ *nicht* zusammenhängend ist. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ein Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat, enthält *keine* Brücke.
- (b) Eine Kante ist genau dann eine Brücke, wenn sie *nicht* auf einem Kreis liegt.

Aufgabe 3 *Schnitte* (T)

Ein *Schnitt* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Partition der Knotenmenge V in zwei Mengen S und $V \setminus S$. Die Größe eines Schnittes $(S, V \setminus S)$ ist die Anzahl $|\{\{u, v\} \in E : u \in S, v \in V \setminus S\}|$ der Kanten, die den Schnitt überqueren. Geben sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(|V| + |E|)$ an, der für einen Graphen eine $\frac{1}{2}$ -Approximation eines Schnittes maximaler Größe bestimmt.

Aufgabe 4 *Bipartite Graphen* (H/T)

- (a) Zeigen Sie, dass jeder Graph mit n Knoten und mehr als $\frac{n^2}{4}$ Kanten ein Dreieck enthält. (T)
- (b) Zeigen Sie ohne Zuhilfenahme der vorhergehenden Teilaufgabe, dass ein bipartiter Graph maximal $\frac{n^2}{4}$ Kanten besitzt. (H)
- (c) Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(|V| + |E|)$ an, der bei Eingabe eines Graphen $G = (V, E)$ überprüft, ob dessen Komplement $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ bipartit ist. Beachten Sie dabei, dass die Berechnung von $\bar{G}$, sowohl bei Darstellung durch Adjazenzliste als auch durch Adjazenzmatrix, unter Umständen $\Omega(|V|^2)$ Zeit in Anspruch nimmt. (H)

Aufgabe 5 *Gradsequenzen* (T)

- (a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass jeder Graph mit mindestens zwei Knoten ein Paar von Knoten identischen Grades besitzt.
- (b) Charakterisieren sie die Graphen, die *genau* ein Paar von Knoten identischen Grades besitzen.

Aufgabe 6 *2-SAT* (T)

Eine aussagenlogische Formel in 2-konjunktiver Normalform (2-KNF) ist gegeben durch eine Menge von n Paaren $c_i = (\ell_{i1}, \ell_{i2})$, wobei ℓ_{i1} und ℓ_{i2} jeweils eine negierte oder nicht negierte Variable ist. Eine solche Formel heißt erfüllbar, wenn eine Belegung der Variablen mit Werten *true* und *false* existiert, so dass für jedes Paar c_i mindestens eines der beiden Elemente ℓ_{i1} bzw. ℓ_{i2} mit *true* belegt ist. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ an, der bei Eingabe einer Formel in 2-KNF entscheidet, ob diese erfüllbar ist.