

## Übung zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie

Tutorübung: 3. November 2008      Abgabetermin: 10. November 2008

### Aufgabe 1    *Zusammenhangskomponenten (T)*

Der Algorithmus von Tarjan bestimmt die Zusammenhangskomponenten eines gerichteten Graphen als Teilbäume des Suchbaumes einer Tiefensuche. Dazu wird für jeden Knoten  $v$  der Zeitpunkt  $pre(v)$  gespeichert, an dem  $v$  erstmals besucht wurde, sowie der Zeitpunkt  $low(v)$ , an dem erstmals ein von  $v$  erreichbarer Knoten besucht wurde (d.h. ein Knoten in der selben Zusammenhangskomponente wie  $v$ ). Geben Sie ausgehend von dieser Idee einen Algorithmus an, der die Zusammenhangskomponenten eines gerichteten Graphen  $G$  bestimmt und  $G$  nur einmal traversiert.

### Aufgabe 2    *Kantengraph (H)*

Beweisen oder widerlegen Sie: Der Kantengraph  $L(G)$  eines Graphen  $G$  hat genau dann einen Hamiltonkreis, wenn  $G$  einen Eulerkreis hat.

### Aufgabe 3    *Hamiltonkreise in dichten Graphen (H)*

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $|V| \geq 3$  und  $|E| > \binom{|V|-1}{2} + 1$ . Zeigen Sie, dass  $G$  einen Hamiltonkreis besitzt.

### Aufgabe 4    *Hamiltonpfade und -kreise in Potenzgraphen (H)*

Für einen Graphen  $G = (V, E)$  und eine natürliche Zahl  $d$  bezeichnet  $G^d$  den Graphen mit Knotenmenge  $V$ , bei dem zwei Knoten  $u$  und  $v$  genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn es in  $G$  einen Weg von  $u$  nach  $v$  der Länge  $\leq d$  gibt. (Die Länge eines Weges ist die Anzahl der enthaltenen Kanten.)

- (a) Geben Sie einen zusammenhängenden Graphen  $G$  an, für den  $G^2$  keinen Hamiltonkreis besitzt.
- (b) Zeigen Sie mit Induktion nach  $|V|$ , dass die dritte Potenz  $G^3$  eines zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  zwischen je zwei Knoten von  $G$  einen Hamiltonpfad besitzt.